メ ラ ー

相対性理論

永田恒夫
伊藤大介 訳

みすず書房

相 対 性 理 論

C. メ ラ ー

永 田 恒 夫
伊 藤 大 介 訳

みすず書房

THE THEORY OF RELATIVITY

by

C. MΦLLER

Publisher : Oxford University Press, London *1952*

すいせんのことば

朝永振一郎

相対性理論が発見されてからすでに半世紀以上になり，したがってたくさんの古典的な教科書も出ているが，それにもかかわらず，Møller 教授の新しい本が日本語に飜訳されたことは日本の学生にとって有難いことである．この本は他のものとくらべて，いろいろな特色をもっている．第一にできるだけ物理的な面をおもてに出すように書かれていることである．相対性理論の本によくある哲学過多や，物理の本か幾何学の本かわからないというような点がこの本には全くない．第二は初学者にも理解できるように大変に親切に，しかもすっきりと整理された形で全体が一貫していることである．記述が物理的であるという第一の特色と相まって，これはこの本のすぐれた点であると思う．第三は昔の本に時々あった行きすぎがこの本には全くないことである．物理学の幾何学化という画期的な試みが一般相対論であまりにも美事に成功したので，昔は，すべての物理現象をこの線にそって説明しようという，いわゆる統一場の理論に多くの人が魅せられて，昔の本ではよくこの種の試みに相当なページがさかれていた．しかしその後，量子論や素粒子論の発展とともに，この種の試みは少くとも今の段階では見当がちがっていることがわかってきた．こういう新しい観点から，この Møller 教授の本には，この種の確立されていない理論はすべて意識してはぶかれている．この点も初学者にとっては重要である．古い本を読んでこの統一場理論に誘惑される人が今でも時々あるからである．

要するにこの本は非常に教育的な，真の意味で物理的な，相対性理論の好教科書であって，これから理論物理をやろうとする学生のみならず，われわれも大いに啓発される本である．

1959年5月

原　著　序

本書は私が過去 20 年間，Copenhagen 大学で講述してきた講義を敷延したものである．したがって本書は，主としていまだ非相対論的力学および電磁力学で用いられている方法よりも高級な数学や物理学を履修していない物理学科の学生のために書かれた教科書である．著者は本書において特に，量子論的効果をすべて度外視したいわば古典相対性理論ともいうべきものについて講述することを心掛けた．現代の物理学において量子現象がきわめて重要であることを思うとき，内容を古典的現象のみに限ってしまったことは，本書の重大な欠陥であると考えられるかも知れない．しかし，内容をこのように限定したことについては，次に述べるような重要な理由が 1 つならずあるからである．先ず，現在においてなお，自己矛盾を含んでいない完全な相対論的量子論は存在していないのである．そして，それ自身ひじょうに広汎な分野の物理現象に対して賞讃に価する精密な記述を与えている古典相対性理論は，将来の矛盾を含まぬ相対論的量子論の発展への出発点であるはずである．したがって，普通の量子力学を真に理解するためには Newton 力学に関する知識が必須であったのと同様に，相対論的量子論の研究者およびこの分野に進もうとする学生にとっては古典相対性理論の原理や方法にに通暁していることは絶対に必要である．また以上のことは別にしても，古典相対性理論は，その内部論理構造の完璧さという点で，またその根本仮定の単純さと一般性という点で，理論物理学の最も壮麗かつ魅惑的な分野の 1 つである．

さて，本書では内容の講述の方法が次の点で従来の教科書と趣きを異にしている．それは，従来多くの教科書で採用されてきた理論の 4 次元的な定式化ということに重点を置かないことである．Lorentz 変換の発見によって時間座標と空間座標との間の対称性が明らかになったが，この対称性に基く 4 次元的表現法は，相対性原理を数学的に表現するのには確かに最もエレガントな方法であった．特に一般相対性理論の発展を促進させることについては最も重要な役割を果した．したがって初期の相対論に関する書物としては，新たに見出されたこの空間座標と時間座標の間の相似性を能うる限り強調したのは，きわめて当然なことであった．しかしながら，今日の教科書としては，純形式的な 4 次元的な表現にやや隠されてしまった空間と時間の根本的な物理的差異を改めて強調することがきわめて有用であるように私には思われる．

このため，はじめの3章では4次元的な描像を全然用いないことにして，特殊相対性理論における運動学および質点の力学は完全に普通の3次元ベクトル解析を用いて展開した．また第 IV 章以後では4次元テンソル解析のエレガントな方法が展開，応用されているが，それでも理論の物理的意味の見通しに便利な3次元的定式化をしばしば用いることにした．たとえば §110 と §111 で取り扱う，与えられた重力場内を自由落下する粒子については3次元的定式化の方法によっている．この粒子の運動は，いうまでもなく4次元空間における粒子の軌道が測地線であるということによって完全に記述されるが，この準幾何学的な記述ではこの現象の物理的な内容を伝えるのに十分ではない．これに対して3次元の物理空間では，この粒子の運動は，慣性系において任意の力の作用を受けている粒子の運動方程式と同じ型の方程式で記述される．ただ違うところは，この物理空間での幾何学が一般に Euclid 的でないということだけである．このような方法で，与えられた重力場の中を任意の速度で運動する粒子の質量，運動量，全エネルギーおよびこの粒子に作用する重力をはっきりと表わす式が得られる．このように3次元的な見方をすると重力論にふたたび力学的な概念をもちこむことになるが，この点については私は，この方が学生にとって一般相対性理論の物理的内容を完全に把握するのにやさしくなると信じている．

第 I 章はそのすべてを非相対論的理論の難点に関する歴史的概観に費した．これは物理学上のある理論を真に理解することは，それ以前のことについての精しい知識を通じてのみ可能であるという理由からである．実験物理に進もうとする多くの学生諸君には，一般テンソル算法の学習に要する時間と労力が，この算法を将来の研究に役立たせうる程度にくらべて釣り合いがとれないと感じられるかも知れない．そのような読者は，はじめの38節を読まれればよい．それだけで特殊相対性理論からえられた主な結果を知ることができよう．またさらに，第 VIII 章は読むことができるであろうし，これを読むことによって，特殊な数学上の方法を学習するというわずらわしい仕事で時間をつぶすことなく，Einstein の一般相対性理論の基底となっているアイディアを覗い知ることができよう．

本書では，相対性理論の進展のうちで，確立されたものであると安心していえるようなものだけを取り上げることにした．したがって重力と電磁気を統一する理論を作ろうとする試みはすべて本書の範囲外の問題であるとして割愛することにした．また宇宙論上の問題については簡単に触れるだけにとどめた．これは，この叢書の中で Tolman がこの問題を詳しく取り扱ってしまってい

るからである．このような制限はあるけれども，科学史の上で最も美しい章の1つになっており，しかもその大部分がただ1人の人 Albert Einstein によって書かれている部門について，本書が相当に完全でありまた偏っていない解説であることを認めていただくことが著者の念願である．

本書を完結するにあたって各方面からよせられた御援助と御助言に深く感謝の意を表する次第である．なかんづく，全期間を通じてこの仕事に暖い関心を寄せられたこと，研究所内での議論や談話によってたえず啓発されたことについて，Niels Bohr 教授に深く感謝の意を表わしたい．また N. F. Mott 教授および I. N. Sneddon 教授には，この英文草稿を読んで私の読みづらいデンマークなまりを取り除いて下さったことを感謝する．さらに Clarendon Press の職員の方々の御協力にも御礼を申し上げたい．

本書の多くの部分が改善されたのは，W. Kohn 博士と W. J. Swiatecki 博士の助言の賜である．またとくに J. Lindhard 氏には式を全部照合していただき校正をもしていただいた．終りに，原稿の作製，校正にたえず御援助をいただいた S. Hellmann 嬢に謝意を表する．

1951年11月

コペンハーゲンにて　　C. M

目　　次

第 III 章 相対論的力学

第 IV 章 相対性理論の 4 次元的定式化: テンソル算法

第 V 章　真空中の電磁力学

第 VI 章　一般に閉じた系. 弾性的連続体の力学. 場の理論

第 VII 章　閉じていない系. 誘電体および常磁性体内における電磁力学. 熱力学

第 VIII 章 一般相対性理論の基礎

第 IX 章 永久重力場．一般 Riemann 空間におけるテンソル解析

第 X 章　物理現象に対する重力場の影響

第 XI 章　一般相対性理論における重力の基本法則

第 XII 章　一般相対論の実験的検証，宇宙論的問題

附　録

第 I 章
特殊相対性理論の基礎．歴史的概観

1. 力学における相対性原理，Galilei 変換

特殊相対性理論は 20 世紀の頭初，主として Einstein の研究によって展開されたものであるが，その基盤となったものを訪ねれば，遙かに過去の時代に溯るのである．ある意味でこの理論は Galilei や Newton の時代以来，自然記述の根底に横たわっていた理念の発展であり，完成されたものであると見なすことができる．この理論の根本的な要請である，いわゆる相対性原理*はすでに Galilei や Huyghens の研究においても，力学の基本法則を展開するのに決定的な役割を演じていたのである．そして力学現象に関して，特殊相対性原理が成り立っていることは，Newton の力学法則からの簡単な帰結の 1 つである．相対性原理を解説するのに力学の法則によるのが最も適切なので，まず純力学的現象の考察から出発することにしよう．

Newton の第 1 法則，すなわち慣性の法則によれば，放置された質点は一直線上を一定の速度で運動をつづける．元来，単に運動というものが考えられるわけがなく，必ず他の何物かに対する運動しか考えられないから，上の命題が精密な意味をもちうるのは，ある準拠系がはっきり定義されていて，これに対して質点の速度が測りうると考えられる場合だけである．それで Newton はあらゆる運動を測る基準となるような準拠系を意味するものとして“絶対空間”という概念を導入した．経験によれば恒星は全体として，この“絶対空間”に対して近似的に静止していると見なすことができる．それは，天界の物質から十分遠方に距っている物体は，恒星に対してつねに一様な速度で運動するからである．

しかし，慣性の法則は“絶対空間”に対して一様な速度で運動しているすべての歪むことのない準拠系に対しても成り立つ．それは自由な粒子は，このような座標系に対しても一様な併進運動をするからである．慣性の法則が成り立つような準拠系をすべて慣性系という．慣性系全体は互に他に対して等速直線運動をする歪まない準拠系の三重に無限の集合である．これらのうちの 1 つが

---

* 第 I 章から第 VII 章まででは，相対性原理と云えばいつも，一般相対性理論の基礎である一般相対性原理でなく特殊相対性原理を指している．

恒星全体に対して静止している絶対系であるけれども，慣性の法則が成り立つという点では，どの慣性系も完全に同等である．

さて，力学における相対性原理というのは，すべての慣性系は，慣性の法則に対してのみならず他のあらゆる力学法則に対しても完全に同等であることを述べたものである．もしこれが正しいならば，力学現象はどの慣性系においても同じ推移の経過をたどることになるから，このような現象を観察することによって，この系全体が“絶対空間”に対して行っている一様な運動を検知することは不可能である．したがって力学現象を調べるだけで，“絶対”系を決定することはできない．

次に，Newton 力学の基礎方程式が実際にこの相対性原理にかなっていることを示そう．いま任意の2つの慣性系 I, I' を考える．この両系で，特定の座標系 S, S' を用いることにする．例えば I 中の S, I'中の S' として直交座標 $\boldsymbol{x}=(x, y, z)$, $\boldsymbol{x}'=(x', y', z')$ を選ぶ．われわれの日常経験からえられた空間時間の概念，そしてこれが Newton が力学の基本法則を定式化するときの基礎になったものであるが，この時間空間の概念によれば，2つの座標系 S, S' で，元来同一な空間の1点を表わした座標ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ の間には

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t \tag{1a}$$

なる関係がある．ここで，$\boldsymbol{v}$ は S 系に対する S' 系の運動の速さとその方向を表わすベクトルである．t は時間で，簡単のため時刻 $t=0$ で両系の原点が一致していたものと仮定する．(1a) のほかに

$$t'=t \tag{1b}$$

という式を加えておいてもよい．これは時間を記述するパラメターがすべての慣性系で同一であることを述べたものである．このように Newton 流の自然現象の記述においては，時間は絶対的な量である．(1a), (1b) は，しばしば **Galilei 変換**と呼ばれるものである．

両座標系の座標軸の方向が平行で $\boldsymbol{v}$ が x-軸の方向である場合には**特殊 Galilei 変換**

$$\left.\begin{array}{lll} x'=x-vt, & y'=y, & z'=z \\ t'=t & & \end{array}\right\} \tag{2}$$

が成立する．両座標系 S, S' は少くも運動学的には全く同等であり，S は S' に対して明らかに速度 $-\boldsymbol{v}$ で運動しているから，(1), (2) に対する逆変換は，ダッシュのついている変数と，ついていない変数をとりかえると共に $\boldsymbol{v}$ を $-\boldsymbol{v}$ でおきかえることによってえられる．

さて，ここで1つの質点の任意の運動について考えよう．(1a) を微分して

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{x}'}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - \boldsymbol{v} \\ \text{または}\qquad \\ \boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

がえられる．ただし $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ は両慣性系におけるこの質点の速度を表わす．(3) は通常の速度合成則に他ならない．特殊 Galilei 変換 (2) の場合には，(3) は

$$u'_x = u_x - v, \qquad u'_y = u_y, \qquad u'_z = u_z \tag{4}$$

となる．速度ベクトル $\boldsymbol{u}'$ および $\boldsymbol{u}$ が z-軸に直角な場合には (4) は

$$u' \cos \vartheta' = u \cos \vartheta - v,$$
$$u' \sin \vartheta' = u \sin \vartheta$$

と書ける．ただし，ϑ, ϑ' は，それぞれ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ の方向と x-軸の間の角を表わし，$u = |\boldsymbol{u}|$, $u' = |\boldsymbol{u}'|$ はベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ の大きさを表わす．いま上の式の一方を他方で割れば

$$\tan \vartheta' = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - v/u} \tag{5}$$

がえられ，両式を 2 乗して加え合わせれば

$$u' = u\left\{1 - 2\frac{v}{u}\cos \vartheta + \frac{v^2}{u^2}\right\}^{1/2} \tag{6}$$

がえられる．

次に質量が m の質点に力 $\boldsymbol{F}$ が作用している場合を考えよう．絶対座標系 S では，この質点は Newton の第 2 法則により次の式で与えられる加速度をえることになる．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}. \tag{7}$$

(1a) と (1b) から

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}'}{dt'^2} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \tag{8}$$

がえられ，また Newton 力学では，力と質量は絶対量，すなわち

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} \qquad m' = m \tag{9}$$

であるから，

$$m'\frac{d^2\boldsymbol{x}'}{dt'^2} = \boldsymbol{F}' \tag{10}$$

がえられる．

このように，Newton の第 2 法則が相対性原理の要求通り，すべての慣性系に対して成り立っていることがわかる．このことは，Newton の基礎方程式が

Galilei 変換に対して不変であるというもっと精密な云い表わし方をすることもできる．周知の通り，加速された準拠系へ移るようなもっと一般的な変換に対しては，この不変性は成立しない．もしそのような系で力学現象を取り扱う場合には遠心力や Coriolis の力のような仮想的な力を導入しなければならない．このような力は考えている準拠系の加速度だけによって決まるものであるから，実在する他の力学系の物理的性質とは，なんら因果関係をもっていないものである．Newton が絶対空間という概念を考えなければならなかったのは，正にこのような等速運動系と加速系のちがいによるのであった．

2. 特殊相対性原理

すでに述べたように，力学に対して相対性原理が成り立っているため，力学現象をしらべているだけでは，絶対系を一意的に決定することが不可能である．ところで相対性理論の根本仮定は，**この特殊相対性原理がすべての物理法則* に対して成立する**ということにある．この理論によれば，すべての物理現象はどの慣性系においても同じ推移の経過をたどらねばならぬことになり，したがってちがった慣性系に乗っている観測者達が各自の実験結果に基いて自然法則を発見したとしても，それらはみな一致していなければならないことになる．

もしそうだとすれば絶対空間という概念は明らかにその意義を失ってしまう．何となれば，どの慣性系も全く同等の理由で絶対系であると主張することができるからである．もちろん，ある特定の慣性系，例えば恒星系に対して静止しているような慣性系を絶対系と呼ぶことにし，すべて自然法則はこの系の座標で表わすことにしようということに対しては何人も反対することはできない．しかしながら，絶対系の選び方が全く任意であることから云って，このようなやり方は非常に不満足なものである．しかも，このようなやり方で進むことは非常に不便でもある．自然法則を導き出すさいに行なった実験は通常恒星系に対して静止している系でなされたものではない．公転による小さな加速度を無視して地球を慣性系と考えても，一年を経ている間には地球は相当にちがったいろいろな慣性系を示していることになる．したがって，“絶対”系への座標変換は，かなり面倒なことになる．

ところがすべての物理現象に対して相対性原理が成り立っておれば，このような変換は不必要になってしまう．なぜならば，ある時間に地球が静止しているような慣性系は，他のいかなる慣性系とも同等だからである．このことがわれわれの自然の記述を非常に簡単にしてくれるのである．

---

* 当然一般相対性理論に含まれるような重力の法則は除外する．

ところがこのような簡単化ができるためには，以下に述べるように，時間空間に関するわれわれの普通の考え方を捨てなければならないのである．相対性原理を電磁現象に拡張すると次のようなことになる．すなわち，すでに述べたように，それぞれ別の慣性系に実験室を構えた2人の物理学者は各自の実験を基にしながら各々独立に同じ Maxwell の電磁力学の基礎式を発見することになる．ところが Maxwell の方程式は普遍定数 c を含んでいる．この定数は，純粋に電磁気的な測定だけで決定できるもので，その値は 3×10^{10}cm/sec† に非常に近い．一方電磁波は真空中を，これをどのような方法で発生させたかということには関係なしに，速さ c で伝っていくことは，Maxwell の方程式からえられる簡単な結果の1つである．Maxwell の光の理論によれば，光の波は特別な電磁波であるから，**真空中**を伝わる光の速さは，光源の運動状態には無関係に，定数 c に等しくなければならない．相対性原理によって，もし Maxwell の方程式が任意の慣性系で成り立つならば，任意の慣性系で，光の速さは，光源の運動に無関係に常に同一の値 c でなければならないことになる．このことは普通の運動学的な考えと明らかに矛盾する．それは普通の運動学の観念から云えば，例えばもし S に対する S' の運動が光の進行方向と同じである場合には S' における光の速さは S における光の速さより遅いはずだからである．

したがって相対性原理を是認することにすれば必然的に空間や時間に対する今までの考え方を改めなければならないことになる．しかしこのような革命的な一歩を踏み出す前に，われわれはそれが本当に必要であるという確信をえたくなるのが当然である．この問題は実験の結果によってのみ解決さるべきものである．この目的に対して最も適しているのは光学の実験で，その理由は光学器械によって達せられる精度が非常に高いからである．われわれは以下の節で，"絶対" 空間に対する実験装置の運動が効いてくるような効果を検出しようという目的で行われた多くの光学実験について簡単な歴史的概観を行うことにしよう．これらの実験はすべて否定的な結果を与え，結局，相対性原理が一般的に受け容れられることになったのである．

3. 平面波の位相の不変性

Maxwell の方程式が任意の慣性系で成り立つとする相対論の立場とは反対に，Maxwell やその時代の人々は，電磁力学の基本方程式が成り立つのは唯1

† W. Weber und R. Kohlrausch (1856), *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, No. 142.

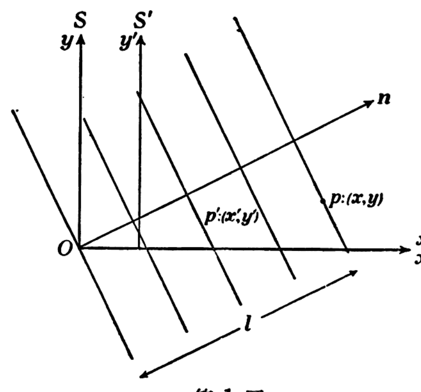
つの慣性系，すなわち“世界エーテル”というものに対して静止している慣性系のみであると主張した．このエーテルというのは，あらゆる物質や真空中を透徹し，すべての光学現象や電磁現象の担い手である媒質と考えられていたのである．さらにエーテルは絶対系を意味し，これが Newton の絶対空間の概念に実体的な物理的意味を与えるものであると考えられていた．われわれは，本節では専らこの立場に立って考えてみることにしよう．そしてまず最初の課題として，エーテルに対して動いている慣性系における光学現象の起り方について，この立場からどのような結果がえられるかを調べることにする．

エーテルに対して静止している直交座標系を S とする．真空中で光の単色平面波は S に対して伝播速度 $c=3\times10^{10}$ cm/sec を有するであろう．この型の波は，波の位相速度，振動数および伝播の方向を与えることによって完全に決定される．まず最初に，エーテルに対して x 軸の方向に一定速度 v で動いている座標系 S' へ移る際にこの3つの量がうける変換を求めてみる．

簡単のため波面の法線が xy-平面内にあるものとしよう．その場合にはこの波は S 系では波動函数

$$\psi=A\cos 2\pi F,$$
$$F=\nu\left(t-\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{c}\right)=\nu\left(t-\frac{l}{c}\right) \tag{11}$$

で記述される．ここで ν は振動数，α は波動法線 $\boldsymbol{n}$ と x-軸のなす角である．$l=x\cos\alpha+y\sin\alpha$ は原点Oから座標が (x,y) の点 p を通っている波面までの距離である（第1図参照）．



第 1 図

(11) の位相 F は次のような簡単な物理的意味をもっている．すなわち $t=0$ に原点 O を通過する波の山に目じるしをつけたと仮定しよう．次に p 点にいる観測者が，この目じるしのついた波が p 点を通過した瞬間から，p を通過する波の数を数えはじめたとする．そのとき，**時刻 t までにこの観測者が数え上げた波の数がちょうどこの位相 F に等しい**．それは1秒間に到着する波の数が ν であり，また目じるしをつけた波がOから p まで進むのに l/c 秒かかるので，観測者が波

を数えていた時間が $t-\dfrac{l}{c}$ 秒間となるからである．

さて，先に導入した動いている座標系を S' とし，2つの座標系 S, S' が $t=0$ で重なり合っており，目じるしをつけた波が，ちょうど $t=0$ で両座標の共通の原点を通過したものとしよう．S' 系で座標が (x', y') である点を p' とし，p' と p は時刻 $t=t'$ で重なり合うものとすれば，目じるしをつけた波が p' を通ってから時刻 t までに p' を通過した波の数は当然，前の場合と同数のFに等しいはずである．ところが一方この数は，p' にいる観測者が数えた波の数であるから，S の場合に用いたのと同じ論法で，これは

$$F=\nu'\left(t'-\frac{l'}{c}\right)=\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{c'}\right) \tag{12}$$

に等しいはずである．ここでダッシュのついた量は，対応する (11) のダッシュのない量と同じ物理量を表わすものであるが，ただそれを座標系 S' で測った値である．**したがって位相は1つの不変量である．**

4. 平面波を特徴づける諸量の変換

時刻 $t'=t$ で p と p' が一致するのであるから，(11) に現われる座標 (x, y, t) と (12) に現われる座標 (x', y', t') とは明らかに Galilei 変換で結ばれているはずである．同じFを与える (11) 式と (12) 式を等しいと置き，(1) 式を用いて座標 (x, y, t) を消去すれば，

$$\nu\left(t'-\frac{(x'+vt')\cos\alpha+y'\sin\alpha}{c}\right)=\nu'\left(t'-\frac{x'\operatorname{coo}\alpha'+y'\sin\alpha'}{c'}\right) \tag{13}$$

をえる．さてこの式は独立変数 x', y', t' のあらゆる値について成り立たねばならない．これが可能なのは，(13) 式の両辺のこれら独立変数の係数同志が相等しい場合に限る．したがって次の等式がえられる．

$$\nu'=\nu\left(1-\frac{v}{c}\cos\alpha\right), \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\nu'\sin\alpha'}{c'}&=\frac{\nu\cos\alpha}{c}\\ \frac{\nu'\cos\alpha'}{c'}&=\frac{\nu\cos\alpha}{c}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(15) 式から直ちに

$$\tan\alpha'=\tan\alpha, \tag{16}$$

すなわち

$$\alpha'=\alpha, \tag{17}$$

および

$$\frac{\nu'^2}{c'^2}=\frac{\nu^2}{c^2} \tag{18}$$

がえられる．最後の式を c' について解けば (14) を用いて，

$$c'=c-v\cos\alpha \tag{19}$$

となることがわかる．

(14), (17) および (19) 式は，エーテルに対して一様な運動をしている座標系に移った場合にこの波を特徴づける3つの量，すなわち振動数，波動法線の方向，および位相速度が，どのように変るかを示している．また (17) 式は，両慣性系で波動法線の方向が変らないことを示している．これに反し，$\alpha \neq \frac{1}{2}\pi$ なる限り，(14) と (19) 式は速度 v を含んでいる．したがって，振動数や位相速度を測ることが，原理的に実験室に固定した座標系のエーテルに対する運動を決めるのに役立つことになる．以下この2つの可能性を別々に論ずることにしよう．

5. Doppler 効果

(14) 式は光の波に対するいわゆる Doppler 効果の数学的表現であり，動いている系における振動数 ν' とエーテルに対して静止した観測者が観測した"絶対"振動数 ν の間の関係を与える．$\boldsymbol{n}$ を波動法線の方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{v}$ をエーテルに対する S' の速度ベクトルとすれば，(14) はまた

$$\nu'=\nu\left(1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right) \tag{20}$$

と書くことができる．ここで $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$ はこの二つのベクトルのスカラー積を表わす．Doppler 効果は光源に対して観測者が運動している場合に起る．ところが (20) をこの場合にそのまま用いることはできない．それは一般に観測者も光源も共にエーテルに対して運動しているのが普通だからである．ν^0 を光源固有の振動数，つまり，光源に対して静止している観測者が測定した振動数であるとすれば，(20) と同様にして

$$\nu^0=\nu(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^0/C) \tag{21}$$

をえる．ここで $\boldsymbol{v}^0$ はエーテルに対する光源の速度である．

(20) と (21) から未知の絶対振動数 ν を消去すれば

$$\nu'=\nu_0\frac{1-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})/c}{1-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^0)/c} \tag{22}$$

という関係が求められる．

振動数 ν', ν^0, 光の伝播方向 $\boldsymbol{n}$ および光源に対する観測者の相対速度 $\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^0$ は直接実験から決めることができるから，(22) から光源および観測

者の絶対速度 $\boldsymbol{v}^0$ および $\boldsymbol{v}$ を決定することが原理的に可能になる．

ところが $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{v}_0$ は c に比べて非常に小さいので (22) を微小量 $(\boldsymbol{v}^0\cdot\boldsymbol{n})/c$ で展開することができる．v/c および v^0/c の2次以上の項を無視すれば，相対速度 $\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^0$ を導入することにより

$$\nu'=\nu^0\left\{1-\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_r)}{c}-\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^0)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_r)}{c^2}\right\} \tag{23}$$

をえる．したがって Doppler 効果は第1近似では相対速度 $\boldsymbol{v}_r$ のみに依存することになる．光源の絶対速度 v_0 が入ってくるのは小さな2次の項のみである．

Doppler 効果は星のスペクトルについて観測されている．地球が年週運動の間に星に近づく運動をしているか，遠ざかる運動をしているかによって，星のスペクトル線が菫色の方，または赤色の方にずれるのである．地球の軌道運動の速さは大体 3×10^6 cm/sec であり，宇宙に対する速度もまた大体これと同程度の大きさである．したがって $v/c\approx10^{-4}$ である．それであるから2次の項の大きさは 10^{-8} 程度となり，このような測定の精度をもってしては，これは到底測ることはできない大きさである．

Doppler 効果は地上で運動している光源についても観測されている．J. Stark† は陽極線管内を高速で走る水素分子イオンが発する光の振動数を測定して，1次の項に関する限り (23) 式とよく一致することを見出している．この実験では，相対速度 v_r，したがって v_0 も 10^8 cm/sec の程度，すなわち $v/c\approx\frac{1}{300}$ の程度である．それゆえ，この場合にも2次の項は小さすぎて測ることができない．であるからこのような実験をもってしては絶対速度を決定することは許されなかったのである．

これよりずっとのち，1930 年代になってから Ives‡ は2次の項の決定を許すまでに進歩した実験技術を用いてこのような実験を繰返した．ところがその結果は (23) 式とは**合わなくて**，相対性理論から導き出された式 (第II章 §25 (II. 90) 式) と一致した．すなわちこの次の項は放射された光の方向には関係せず相対速度 v_r のみにしかよらないことがわかった．すなわち，相対性原理の教える通り，エーテルに対する相対運動を観測することができなかったわけである．

---

† J. Stark, *Ann. d. Phys*, **21**, 40 (1906); *J.* Stark and K. Siegel, ibid. **21**, 457 (1906); J. Stark, W. Hermann, and S. Kinoshita ibid. **21**, 462 (1906).

‡ 例えば H. E. Ives and G. R. Stilwell, *Journal of the Optical Society of America*. **28**, 215 (1938) を参照せよ．

この実験はずっと後になってから行われたのであるから，相対性理論の展開の歴史に影響を与えなかったのは当然である．Stark の実験は，精度が足らなかったので相対性原理が成り立つかどうかに関して何の判定をも与えることはできなかったけれども，これらの実験結果は相対性原理と矛盾するものではなかった．

6. 真空中における光の速度

さて，地球上での実験で光の速度を測定すればそれから地球の絶対速度 v をきめることができるかという問題に移ることにしよう．(19) 式は

$$c'=c-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{24}$$

と書くことができ，この式に v が入っているから 8 頁で述べたように，v をきめることは原理的に可能なはずである．ところが Fizeau (1849) と Foucault (1865) による有名な光の速さの測定では地球の運動の影響が全然現われないで，相対性原理通り，光の速度がつねに同じであることがわかったのである．エーテル理論では，この結果をどのようにして理解できるだろうか?

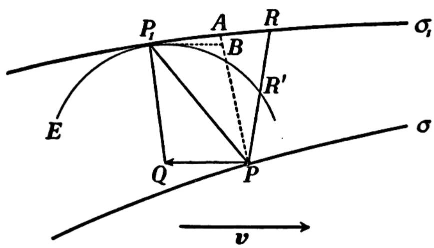
まず第一に注意すべきことは，これらの実験で測られたのは位相速度ではなくて，いわゆる光線速度でるることである．例えば Fizeau がはじめて行った実験では，光の信号をある路にそって往復させ，信号が送りだされた時刻とそれが還ってきた時刻の差が測定されたのである．そうすればその速度は，通った路程とこの時間の比として決まる．さて，エーテルに対して静止している座標系 S では光の信号の速さが位相速度 c に等しいとしても，動いている系 S' では光の信号の速さは (24) で与えられる位相速度 c' に等しくはならないであろう．このことは次のような点に注意すれば，ありそうなことである．それは，光の信号は元来ある大きさの電磁エネルギーのことであり，しかもこのエネルギーは質量のように保存される量であるから，一つの信号はいろいろな点で1つの質点によく似ているということである．したがって，動いている座標系 S' での光の信号の速度はむしろ (3), (5) および (6) で u をエーテル内での光の速度 c とおいたもので与えられることが予想される．

次にこの予想が当っていることを光の波動論を用いた詳しい考察によって確めてみる．この考察の結果によれば，動いている系ではエーテルは異方性媒質のように振舞うので，位相速度と光線速度を区別しなければならない．光線速度は光のエネルギーの伝わる速度であって，ちょうど (3) で表わされるものである．以上の結果はよく知られている Huyghens の原理を用いて導くことができる．Huyghens の原理は幾何光学の領域に属するすべての現象に適用できる，

Maxwell の方程式からえられる結論である．この原理によれば，ある波面上の各点から出た素元波の包絡面をつくれば，それが次の新しい波面になる．

エーテル系 S に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている座標系 S' での光の伝播を考えよう．この S' 系では速度が $-\boldsymbol{v}$ の“エーテルの風”が吹いているから，あたかも風が音波を流すように，エーテルの風もその方向に素元波を流すことになる．

第2図は S' 系での光の波が次々にとる2つの位置を示したものである．面 σ は与えられた波面が時刻 t において占める位置を示す．時刻 $t+dt$ における波面 σ_1 を作図するため，σ 上の各点Pを素元波の出発点と考える．エーテルの風が吹いているために，時刻 $t+dt$ でこの素元波は中心がPからエーテルの風の方向に距離 vdt だけずれた点Qを中心とする球面 E となるであろう．したがって無限小ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は



第 2 図

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\boldsymbol{v}dt \tag{25}$$

で与えられる．

エーテル中を素元波が伝わる速さは c であるから，球面 E の半径は $\mathrm{QP_1}=cdt$ である．波面 σ_1 はあらゆる素元波の包絡面として与えられる．すなわちベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}$ は接点 $\mathrm{P_1}$ において σ_1 に直交し，$dt\to 0$ の極限では，$\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}$ は σ にも直交する．したがってベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}$ の方向は位相速度ベクトルの方向である．この結果

$$\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}=\boldsymbol{c}dt=c\boldsymbol{n}dt \tag{26}$$

をえる．ここで $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{n}c$ はエーテル中における位相速度ベクトルである．S' 系では位相速度はその定義により

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\boldsymbol{c}'dt=c'\boldsymbol{n}'dt \tag{27}$$

で与えられる．ここで単位ベクトル $\boldsymbol{n}'$ は S' 系における波動法線の方向を表わす．(17) によれば

$$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n} \tag{28}$$

なることは明らかである．波面が曲面であってもその微小部分は平面とみてよいから，c' と c との間の関係はやはり (24) で与えられなければならない．このことは，

$$\mathrm{PB}=\mathrm{QP_1}=c\,dt$$

であり，BA がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BP_1}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\boldsymbol{v}dt$ の $\boldsymbol{n}$ 方向への射影であることに注意すれば (27), (28), (26), および (25) から，ただちにえられることである．

さて，S' 系の観測者が見た光線の方向，すなわち光のエネルギーの伝わる方向はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}$ の方向で与えられる．光線のこの相対速度を $\boldsymbol{u}'$ で表わせば

$$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}=\boldsymbol{u}'dt=u'\boldsymbol{e}'dt \tag{29}$$

となる．ここで $\boldsymbol{e}'$ は光線の相対速度の方向を表わす単位ベクトルである．

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}$ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{QP_1}}$ の和

$$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP_1}} \tag{30}$$

である．$dt\to 0$ の極限で，これは，(25), (26) および (29) により

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v} \tag{31}$$

となる．絶対系では光線速度は位相速度に等しい．

$$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{e}=\boldsymbol{c}=c\boldsymbol{n}, \tag{32}$$

すなわち

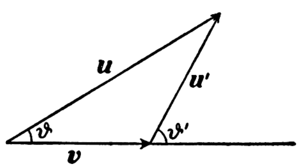
$$u=c, \qquad \boldsymbol{e}=\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}'.$$

したがって (31) は

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \tag{33}$$

と書くことができる．

このようにして光線速度についても，粒子の速度の場合と同じ合成則，「$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}'$ と $\boldsymbol{v}$ の幾何的な和に等しい」がえられる．ϑ, ϑ' をそれぞれ絶対，および相対光線速度が速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ となす角とすれば $u=c$ であるから，第 3 図の三角形についての考察からただちに



第 3 図

$$\tan\vartheta'=\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta-v/c} \tag{34}$$

および

$$u'^2+v^2+2vu'\cos\vartheta'=u^2=c^2$$

がえられる．u' についてこの方程式をとけば

$$\begin{aligned} u'&=\{c^2-v^2+v^2\cos^2\vartheta'\}^{1/2}-v\cos\vartheta', \\ &=\{c^2-v^2+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}')^2\}^{1/2}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}') \end{aligned} \tag{35}$$

をえる．(35) を (24) と比べてみればわかるように，相対光線速度と位相速度は一般には異なり，その差は v/c の 2 次の程度である．ただ光線の方向（および波動法線の方向）が $\boldsymbol{v}$ と同方向または逆方向の場合に限って，両速度は相等

しくなり，その値はそれぞれ $c+v$，または $c-v$ に等しい．

さて，Fizeau や Foucault の方法で測った速度が光線速度であることは明らかであるが，(35) に v が入ってくるから，これらの実験に基いて地球の絶対速度を決定することは原理上可能なはずである．一方，なぜ光の速度の変化が観測されなかったのかという理由を知ることは簡単である．これらの実験では光線をある既知の閉じた径路にそって送り，光の信号がそれをまわるのに要する時間を測っている．限られた広さのところで光の径路をできるだけ長くするためには適当に鏡を配置しておいて光線を何回も反射させる．鏡と次の鏡の間で光線の走った距離を $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_i$ とし，それぞれの光線の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots\cdots, \boldsymbol{e}_i'$ とすれば，光線が閉じた多角形を描くのであるから

$$\sum_i l_i \boldsymbol{e}_i' = 0 \tag{36}$$

であることは明らかである．またこの閉じた径路を光が通過するに要する時間は (35) により

$$t = \sum_i \frac{l_i}{\{c^2 - v^2 + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i')^2\}^{1/2} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i')} \tag{37}$$

である．これを微小量 v/c で展開してその2次以上の項を無視すれば

$$t = \sum_i \frac{l_i}{c} + \sum_i \frac{l_i(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i')}{c^2}$$

をえる．ところが (36) により，上式の1次の項は零になってしまい，この近似では

$$t = \sum_i l_i/c$$

となる．それであるから2次以上の項を無視するときは，測定された時間は，地球がエーテル中に静止している場合と同じことになる．したがって絶対速度 $\boldsymbol{v}$ を決定するには少くとも2次の量を測らなければならない．ところが Fizeau や Foucault の方法ではこのような高い精度がえられない．こうして，これらの実験結果が相対性原理と一致していることはエーテル理論によっても理解できることなのである．Michelson が2次の量の測定を許すような方法を考案し，これによって相対性原理が成り立つことを決定的に証明しえたのは，そう何年か後のことではなかったのであるが，ここでは歴史の順序を追うことにし，Michelson の実験については，ずっと後の節 (§12) で論ずることにする．

7. 屈折性媒質中における光の速度

今までわれわれは，何もない空間における光の伝播だけを論じてきた．今度

は空間が屈折率が n の等方性の透明物質で占められているものとしよう．この物質が世界エーテルに対して静止しているならば，この絶対系 S における位相速度は Maxwell の現象論的電磁力学により

$$c_1=\frac{c}{n}, \qquad n=(\epsilon\mu)^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

である．ただし ϵ はこの物質の誘電率，μ はその導磁率である．次に動いている座標系からみた位相速度 c_1' は，(24) との類推から

$$c_1'=c_1-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{39}$$

で与えられる．屈折物体が絶対系 S に対して静止しているならば，この式は正しい．しかし，この物体が速度 v で動いているとしたら，すなわち S' 系に対して静止しているものとしたら，S' 系での位相速度を表わす式はどうなるだろうか?

これは，むかし盛んに討論された問題である．最も簡単なのは (39) がそのまま成り立つと仮定することである．云いかえればエーテルが運動物体に引きずられずに自由にその中を通り抜けてしまうという仮定である．そのときは S' 系では速度 $-\boldsymbol{v}$ のエーテルの風が吹くことになり，§6 の場合のように Huyghens の原理を用いて光線速度を求めることができる．それには (35) で c を今の場合の位相速度 $c_1=c/n$ でおきかえるだけでよく，S' 系での光線速度として

$$u'=\{c_1^2-v^2+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}')^2\}^{1/2}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}') \tag{40}$$

をえる．

エーテルが運動物体中をなんらの攪乱もうけずに通り抜けると仮定する代りに，エーテルがこの物体に完全に引きずられてしまうという考え方も提出された．この考え方は Stokes† によって提唱されたものであるが，この仮説によれば S' 系ではエーテルの風が吹くことがないから

$$u'=c'=\frac{c}{n} \tag{41}$$

であることは明らかである．

第三の可能性は，エーテルが運動物体に，例えば速度 αv で引きずられると仮定することである．ここでいわゆる“随伴係数”α は 1 より小さな正の数で屈折率の函数である．この仮説は Fresnel‡ が提出したもので，彼はエーテル

† G. G. Stokes, *Phil Mag.* (3), **37**, 9 (1845); *Mathematical and Physical Papers*, **1**, 134 (1880).

‡ A. J. Fresnel, *Ann. de chim. et de phys.* **9**, 57 (1818).

の弾性体理論に基いて，随伴係数として次の式を与えた．

$$\alpha=1-\frac{1}{n^2}. \tag{42}$$

この仮説によれば，引きずられているエーテルに対する S' 系の速度は $\boldsymbol{v}-\alpha\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}/n^2)$ であるから，この系での位相速度は

$$c_1'=c_1{}^*-\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})}{n^2} \tag{43}$$

となる．ただし $c_1{}^*=c/n$ は引きずられているエーテルと一緒に運動する系 S^* での位相速度である．絶対系 S は S^* に対して速度 $-\alpha\boldsymbol{v}$ で運動しているから，絶対系 S での位相速度は結局

$$c_1=c_1{}^*+\alpha(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})=\frac{c}{n}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \tag{44}$$

となる．

§6 で述べた方法で S' 系での光線速度 u' を求める際，§6 の S 系の役を演ずるものが，この S^* であるとしなければならない．S' 系では速度 $-(\boldsymbol{v}/n^2)$ でエーテルの風が吹いているから，(31) との類推で

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{c}_1{}^*-\frac{\boldsymbol{v}}{n^2} \tag{45}$$

をえる．$\boldsymbol{c}_1{}^*$ は S^* 系での位相速度でその大きさは $c_1{}^*=c/n$ である．この光線速度の大きさは (35) で c を $c_1{}^*=c/n$, $-\boldsymbol{v}$ を $-(\boldsymbol{v}/n^2)$ でおきかえることによってえられる．すなわち

$$u'=\{c_1{}^{*2}-v^2/n^4+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}')^2/n^4\}^{1/2}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}')/n^2. \tag{46}$$

一方絶対系 S では速度，$\alpha\boldsymbol{v}=(1-1/n^2)\boldsymbol{v}$ でエーテルの風が吹いているから，絶対系での光線速度は (45) および (46) との類推から

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}_1{}^*+\alpha\boldsymbol{v},\quad u=\{c_1{}^{*2}-\alpha^2v^2+\alpha^2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})^2\}^{1/2}+\alpha(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\\&\alpha=1-\frac{1}{n^2},\quad c_1{}^*=\frac{c}{n}\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

あるいは v に関して2次の項を省略して，

$$u=\frac{c}{n}+\alpha(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}) \tag{48}$$

となる．(45) と (47) から $\boldsymbol{c}_1{}^*$ を消去すればふたたび

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v} \tag{49}$$

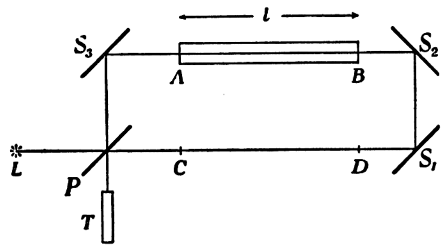
なる合成則がえられる．

(43), (46), (44) および (47) を比べてみればわかるように，光の進行方向が速度 $\boldsymbol{v}$ の方向と同じ場合，および逆の場合には光線速度と位相速度は一致する．このことは何も計算しなくても，エーテルの風がこの場合素元波を光線と平行

な方向に運ぶことからすぐわかることである．この節で述べた考察は屈折率が連続的に変動する不均質な物体の場合についても成り立つ． S^* 系は n の値に依存するのでこの場合には，物質内の場所場所によってちがった S^* 系を考えなければならないことになる．

8. Hoek および Fizeau の実験

前節の結果より透明物質中での光の速度を測ることによって地球の絶対運動を決定できる新しい可能性が開けるように見える．この種の実験は 1868 年 Hoek† によって行われた．彼は第4図のような配列の干渉計を用いた．光源Lを発した単色光は，45° の角で置かれた（薄く銀メッキした）ガラス板Pによって透過する部分1と反射する部分2に分けられる．透過された光線 1 は鏡 S_1, S_2, S_3 で反射されて矩形の径路 $PS_1S_2S_3P$ を通り，その一部がふたたびPを通り抜けて望遠鏡Tに入る．反射された光線2は同じ矩形の経路を逆に回り，Pに戻ったとき一部反射されてTに入り，そこで1と干渉を起す．S_2 と S_3 の間には屈折率 n の物質（例えば水）をつめた長さ l の管が挿入されている．



第 4 図

この装置全体がエーテルに対して静止していたとしても望遠鏡には干渉縞が現われる．それは，望遠鏡内の同一点に焦点を結ぶ両光線 1, 2 が通過した光学距離が厳密に等しくなる程精密に2つの鏡の傾きを調節することは不可能だからである．ところでこの装置全体がエーテルに対して速度 v で動いているときには，それによって光線 1と2の間にさらに位相差 ΔF が生ずる．この位相差は (40) か，(41) あるいは (46) のいずれかを用いて計算できる．

簡単のため，PS_1 および S_2S_3 が世界エーテルに対する装置の運動方向 v に平行になるようにこの実験装置はしつらえられているものとしよう．その場合，位相差 ΔF は光線 1, 2 が各々管の長さ AB および PS_1 を結ぶ線上にとった同じ長さ CD を通るのに要する時間 t_1, t_2 の差によって生ずるものであることは明らかである．残りの通路 DS_1S_2B および AS_3PC 上では両光線は全く同等であるから，これらの部分は位相差 ΔF には全く効いてこない．

† M.Hoek, *Archives Néerlandarises des Sciences Exactes et Naturelles.* **3**, 180 (1868).

さて，t_1 および t_2 の値はエーテルが屈折性物質にどの程度引きずられるかということに関係する．全然引きずられないとすれば，(40) により

$$t_1=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c/n+v},\qquad t_2=\frac{1}{c/n-v}+\frac{1}{c+v}$$

となる．ただし，ここで空気の屈折率は1であるとした．光線 1, 2 の位相差が装置の絶対運動によるものである限り，これは

$$\Delta F=\nu(t_2-t_1)=2l\nu v\left(\frac{1}{(c/n)^2-v^2}-\frac{1}{c^2-v^2}\right)$$

となる．あるいは v/c の2次以上の項を無視すれば

$$\Delta F=\frac{2l\nu}{c}\frac{v}{c}(n^2-1) \tag{50}$$

をえる．

この装置が地球に対して静止しているときは，v は地球の絶対運動の速度に等しい．したがって，この装置を地球の運動方向に対して直角な軸のまわりに180° 回転すれば，問題の位相差は $-\Delta F$ となる．したがってこのような回転によって位相差 $2\Delta F$ に相当する干渉縞のずれが起らなければならない．(50) によれば ΔF は v/c に関して1次の量であるから，この効果は容易に観測できるはずである．

それにもかかわらず Hoek の実験の結果は否定的であった．すなわち装置を廻転しても干渉縞のずれは観測されなかった．この結果も相対性原理と完全に一致している．相対性原理によれば，すべての現象はこれを測定する器械の運動状態に無関係であるべきだからである．

Hoek の実験は2次以上の項が測れるほどの精度ではないので，この実験からえられた否定的な結論はエーテル理論にとってそれほど重大な困難とはならなかった．つまりこの実験はエーテルが屈折性物体に引きずられないという仮定からえられた (40) 式が成り立たぬことを示したに過ぎない．同様にして Stokes の仮説も Hoek の実験結果の場合には採用できないことになる．なぜならば (41) から ΔF として

$$\Delta F=-\frac{2l\nu}{c}\frac{v}{c} \tag{51}$$

がえられるからである．

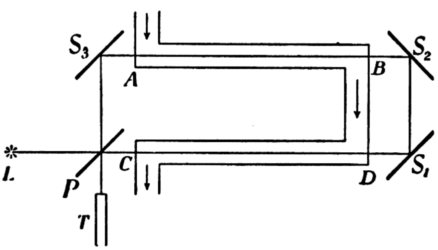
これに反し，随伴係数が (42) であるとする (43) および (45) 式が Hoek のえた結果の説明を与えるように見える．この場合には，(45) 又は (46) から

$$\Delta F=\nu\left(\frac{l}{c/n-v/n^2}+\frac{l}{c+v}-\frac{l}{c/n+v/n^2}-\frac{l}{c-v}\right)$$

$$=2l\nu v\left(\frac{1}{c^2-(v/n)^2}-\frac{1}{c^2-v^2}\right) \tag{52}$$

がえられる．ここでもし2次以上の項を無視すれば，$\varDelta F$ は零となる．また第1近似で $\varDelta F$ を零ならしめるような随伴係数 α の値は Fresnel が与えた (42) 以外にないことも，ただちにわかる．したがって Hoek の実験は運動物体中の光の速度に関する Fresnel の式を，少くとも第1近似の項まで，たしかめたものと考えることができる．

同様な結果は，すでに 1851 年に Fizeau† が流水中の光の速度の測定によってえている．その実験装置 (第5図をみよ) は Hoek の実験における干渉計の配列と非常によく似ている．ただ違うところは，この場合光線 1, 2 が S_2S_3 間のほかに P_1S_1 間でも水中を通過する点だけである．図に示すように，光線1は水の運動の向きと逆の向きに水中を通過し，光線2は同じ向きに通過する．Fizeau は水が管内に静止している場合と，管内に非常に強く水を流した場合について，干渉縞の位置を比較したところ，干渉縞の著しいずれを観測することができた．



第 5 図

Hoek の実験からエーテルに対する地球の運動が効くのは2次以上の項であることがわかっているから，この装置が絶対系 S で静止しているものと見なして計算を進めてよい．そのときは (48) 中の $\boldsymbol{v}$ は簡単に管に対する水の速度に等しいとしてよい．1と2の位相差を与えるのは径路 AB および CD のみであり，ここでは $\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{v}$ に平行であるから，(48) から位相差として

$$\left.\begin{aligned}\varDelta F&=l\nu[\{c/n-v(1-1/n^2)\}^{-1}-\{c/n+v(1-1/n^2)\}^{-1}]\\&=\frac{2l\nu v}{c^2}(n^2-1)\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

をえる．ただし l は光が水中を通る部分の全長である．Fizeau が測定した干渉縞のずれは (53) で与えられる位相差と完全に一致した．

9. Lorentz の電子論

前節で述べた実験は Fresnel の式 (42)〜(48) に，少くもその1次のすべて

† H. Fizeau, *C. R.* **33**, 349 (1851); A. A. Michelson and E. W. Morley, *Amer. Journ. of Science*, **31**, 397 (1886); H. Fizeau, *Ann. d. Phys. und Chem., Erg.* **3**, 457 (1853).

の項について決定的な実験的証明を与えたものと考えてよい．ところが屈折率というものは元来測定に用いた光の振動によって変るものであることに注意すると，Fresnel の式を素朴なエーテル理論から導くことには重大な困難があることがわかる．(42) の随伴係数 α は n の函数であるから，エーテルの引きずられ方は運動物体の性質のみならず光の振動数にもよることになる．厳密に云えば，光の色ごとに別々のエーテルを導入しなければならないことになる．

もちろん，このような仮定は許されるはずがない．そして，Fresnel の力学的なエーテル理論にせよ，エーテルとは Maxwell の方程式が成り立つ準拠系であるとする Maxwell の現象論にせよ，その基底にはこのような困難が横たわっているのである．実際，随伴現象が振動数によるとなると一体どの準拠系で Maxwell の電磁力学の方程式が成り立つのかを決めることができなくなってしまう．

この困難は，屈折率がこの理論では一定で $(\epsilon\mu)^{1/2}$ に等しく，したがって分散現象を説明することができないということと密接な関係がある．分散や随伴現象の満足な説明は Lorentz† が彼の電子論の中で与えている．この理論ではエーテルは屈折性媒質に全然引きずられることがなく，ある特定の慣性系（絶対系）内でつねに静止しているものと考える．また物体は原子よりなり，原子は正負の荷電粒子よりなるものと仮定する．正の荷電を有する粒子はほとんど原子の全質量を担うのに反し，負の荷電粒子，電子は非常に軽いものと考える．これらは光波の電磁場の影響をうけてその平衡位置を中心に強制振動を行う．したがって，電子自身電磁波を発することになる．そして，これが入射波と干渉する結果として，静止媒質中の光の速さが c から c/n に変る．

この理論によれば屈折率 n は一般に電子の固有振動数と入射波の振動数との差に依存する．Lorentz はさらに，屈折性物体の一様な運動が振動電子の発する波を変え，その結果運動物体内での光の位相速度が第1近似で Fresnel の式 (43) および (44) で与えられるようになることを示した．

このように屈折性物体中の光の伝播に関しては Lorentz の電子論は少くとも第1近似で Fresnel の理論と同じ結果を与え，しかも Fresnel の式を導き出すのに Fresnel 自身が用いた方法に向けられた厳しい反対を受けなくてすむわけである．それだけでなく，この理論はある点では Fresnel の式 (44) のもっと精密な表現を与えているのである．例えば，分散媒質の屈折率 n は振動

† H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons*, Leipzig, 1916, なお L. Rosenfeld, *Theory of Electrons*, Amsterdam, 1951 を見よ．

数νに依存し，このνは Doppler 効果のために S 系と S' 系でその値が異なるから，(44) 式に代入すべき振動数，したがってnの値としてはこのどちらをとるべきかがはっきり指定されなければならない．Lorentz は代入すべき $n(\nu')$ としては，その函数形はエーテルに対して静止している物体の中で成り立つものをとるべきであるが，ν' としては屈折性媒質と一緒に動く系 S' での振動数をとるべきであることを示すことができたのである．

上に述べたいろいろな結果は後に相対性理論から導くはずであり (第 II 章)，その方がより簡単であるから，Lorentz の理論にはこれ以上深入りしないことにする．ここではただ 2 次以上の項を無視する限り，Fresnel の式 (42)〜(48) が電子論からの結果であることを注意するだけにしておこう．この式を用いて次の章でわれわれは，Lorentz 流のエーテル理論が，v/c の 1 次までのあらゆる光学現象に対して相対論の要求と一致する結果を与えることを示すことにしよう．

10. v/c について 1 次までの効果に関する限り，エーテル理論と相対性原理が一致すること．Fermat の原理

相対性原理によれば，地球に対して不動の 2 点を通る光線の径路は地球の絶対運動とは完全に無関係であるべきである．このことは少くも近似的には正しくなければならない．さもなければ 1 つの物体に対して常に一定した光学的な像を結ばせることができなくなるからである．例えば光学機械のレンズ系内の光の径路が地球の絶対運動によって著しく左右されるとするならば，このような機械内での結像は時間によって変ってくることになろう．しかしながら，このような効果はいまだかつて観測されていないのである．

このことは，Lorentz が示したように†，2 次の項が非常に小さくて測定できないものとすれば，Lorentz の電子論でも容易に説明することができる．相対光線速度 u' が第 1 近似で絶対速度 $\boldsymbol{v}$ に決定的に依存することを想えば，Lorentz の理論からえられたこの結論は非常に注目すべきことである．いま (46) で 1 次以上の項を無視すれば

$$u'=\frac{c}{n}-\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}')}{n^2} \tag{54}$$

がえられる．

この式に基いて光線の径路を作図するため，もう一度 (11 頁の) 第 2 図について考えてみる．(29) と同じく

† 前頁の脚註を見よ．

$$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}=u'e'dt$$

であるが，ここでは u' は(54)で与えられ，e' はPを通る光線の方向の単位ベクトルである．今回は“引きずられている”エーテルに対して静止している S^* 系が**真空の場合の**絶対系 S の役目をするから，(25) および (26) 式は $\mathrm{QP_1}=cdt/n$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\boldsymbol{v}dt/n^2$ としなければならない．ただし，n はいま考えている点における媒質の屈折率である．隣りあう波面 σ, σ_1 上にある同一光線上の2点 P, $\mathrm{P_1}$ を共軛点と呼ぶことにしよう．光線を作図することは隣りあう一連の波面の上に次々に共軛点をきめていくことにほかならない．さて，σ および σ_1 上に任意の2点を考え，その距離を ds とし，ds/u' なる量を考える．ただし u' は (54) で与えられるものとするが，その中に現われる e' としてはこの場合，この2点を結ぶ直線の方向の単位ベクトルをとるものとする．もしこの2点が第2図の P, $\mathrm{P_1}$ のような共軛点であるとすれば，ds/u' は波面が σ の位置から σ_1 の位置まで伝わるに要する時間 dt に等しい．この2点が共軛点でない場合，例えば第2図のPとRのような場合には，ds/u' は dt よりは大きくなる．なぜならば，この場合には，$dt=\mathrm{PR}/u'$ であるが，PR' は PR が素元波Eと交わる点とPとの距離であり，RはEの外側にあるので $ds>u'dt$ となるからである．

さて，A, B を屈折性物体内の2点とし，積分

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{ds}{u'} \tag{55}$$

を考える．ただし，これは AB を結ぶある任意の曲線に沿って行うものとし，u' はその曲線上の各点における ds の方向の光線速度 (54) である．上に述べた議論からわかるように，積分 (55) はこの曲線が AB を通る光線に一致した場合に最も小さな値をとることになろう．なぜならば，この場合に限って曲線上のすべての ds が共軛点を結んだものになっているからである．

このように屈折性媒質内の任意の2定点 AB を通る光線は**積分 (55) が光線の径路について行った場合に極小になる**という条件によって定まる．そしてこの積分は光が A から B まで伝わるに要する時間に等しいから，この定理は **Fermat の原理**にほかならない．このように Fermat の原理は Huyghens の原理からの1つの帰結である．

(54) を用いれば，(55) の被積分函数は第1近似では

$$\frac{1}{u'}=\frac{1}{c/n-(\boldsymbol{v}\cdot e')/n^2}=\frac{n}{c}+\frac{(\boldsymbol{v}\cdot e')}{c^2} \tag{56}$$

となり，したがって，積分は

$$\int_{B}^{B}\frac{ds}{u'}=\frac{1}{c}\int_{A}^{B}nds+\frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\int_{A}^{B}d\boldsymbol{s}\right) \tag{57}$$

となる．ここで $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}'ds$ は AB を結ぶ曲線上の相隣る 2 点を結ぶ無限小ベクトルである．したがって(57) の最後の項はこの曲線 $\boldsymbol{v}$ の方向への射影に v/c^2 を掛けたものに等しく，この射影は AB を結ぶ曲線ならどれについても同じである．

こうして変分を問題にする場合には，(55) は

$$\int_{A}^{B}\frac{ds}{u'}=\int_{A}^{B}\frac{n}{c}ds \tag{58}$$

でおきかえることができる．一方，この式は，この屈折性物体がエーテルに対して静止している場合に光がAからBまで伝わるのに要する時間に等しい．したがって第1近似まででは運動物体中の2点の間の光の径路はこの物体がエーテルに対して静止している場合と全く同じことになり，相対性原理に矛盾しない．すなわち，静止した媒質中で光の径路を小孔をあけたスクリーンを並べることによって捕えておけば，この装置全体を一定の速度で動かしても光線はやはり，これらの小孔を通過することになる．

Hoek の実験によれば，彼が用いた特別な装置の中でおこる干渉現象は少くとも第1近似では地球の絶対運動の影響をうけなかった．そればかりではなく，その後に行われた多くの干渉の実験でも地球の絶対運動の影響を検知することができなかった．これらの事実は完全に相対論の要請にかなっているにもかかわらず，Lorentz† が示したように，2次の項が実験の精度以下であると見なしてよいならば，エーテル理論に基いて容易に説明できるのである．

任意の干渉実験について考えよう．この実験で装置のどの部分も地球と運動を共にする系 S' に対して静止しているものとする．干渉実験では同じ点Aから出発してAからBまで別々の通路 I, II を通ってBに達し，そこで干渉を起すような2つの光線 1, 2 が含まれている．(57) によれば 1, 2 がAからBまで行くのに要する時間 t_1, t_2 は

$$\left.\begin{aligned} t_1&=\int_{\mathrm{I}}\frac{ds}{u'}=\int_{\mathrm{I}}\frac{n}{c}ds+\frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\int_{\mathrm{I}}d\boldsymbol{s}\right),\\ t_2&=\int_{\mathrm{II}}\frac{ds}{u'}=\int_{\mathrm{II}}\frac{n}{c}ds+\frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\int_{\mathrm{II}}d\boldsymbol{s}\right)\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

となる．ここで (59) の積分は2つの通路 I, II についてAからBまで行うものとする．それらの径路の両端は同一であるから，(59) の末項は相等しく，時間

† 19頁の脚注を見よ．

の差は簡単に

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \int_{\mathrm{I}} \frac{n}{c} ds - \int_{\mathrm{II}} \frac{n}{c} ds \tag{60}$$

で与えられる．

したがってこの時間の差は，装置がエーテル中に静止している場合と全く同じになる． 点Bにおける光線 1, 2 の位相差はこの時間の差に振動数をかけたものであり，(60) には地球の絶対速度は入っていないから，地球の運動方向に対してちがう位置をとらせるため装置全体を回してみても位相差に何の変化も現われないことになる．したがつて，このような回転によっては (第1近似で) 干渉縞にはなんのずれも現われないことになる．

11. 光　行　差

前節で述べたように光線の進行方向は，とにかく第1次近似では光源および観測者の絶対運動に無関係である．しかしながら光線の方向は観測者に対する光源の速度に依存する．この現象は**光行差**と呼ばれ 1727 年 Bradley† によって観測された．彼は空の星が一団となって1年を週期として運動していることに気づいた．この見掛け上の運動は，星からきた光の観測される方向が星に対する地球の速度に依存することによるものである．

光行差の大きさを求めるため，地球の大気のちょうど外の処に1点 P′ を考える．ただし，この点は地球と共に運動する系 S' に固定されているものとする．上の考察によれば光行差は星と観測者の間の相対速度によるだけであるから，簡単のため星が絶対系 S に静止しているものと見なしてよい．さて星からの光線のうち点 P′ を通る光線について考える．この場合，光の絶対的な方向によって地球が静止しているとした場合に観測される星の方向が定まる．これに反し，光の相対的な方向は星の見掛け上の位置しか決めない．P′ における屈折率 n が 1 に等しいから，光の相対的な方向と絶対的な方向の間の関係は (34) 式で与えられる．地球の運動方向に対する星の実際の方向および見掛けの方向の角をそれぞれ θ, θ' とすれば $\vartheta = \pi + \theta$, $\vartheta' = \pi + \theta'$ で (34) から

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \dfrac{v}{c}} \tag{61}$$

がえられる．

さて，P′ から地上の天文学者の望遠鏡までの光線の径路は，とにかく第1近似では地球の運動に無関係であるから，光はこの径路でこれ以上の行差をうけ

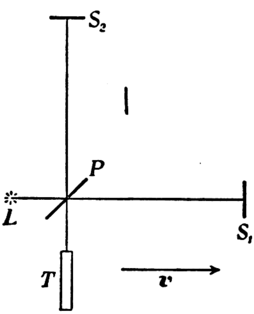
† J. Bradley, *Phil. Trans.* **35**, 637 (1728).

ないであろう．このことは，たとえ強い屈折性媒質中を光が通る場合，例えば望遠鏡に水をつめておいた場合にも正しい．Airy† (1871) はこのような実験を行い，水があっても光行差の大きさには変りがないことを示した．光行差の式 (61) は観測と完全に一致することが証明されたのである．

12. Michelson の実験

以上述べた通り，われわれが今まで論じてきた実験の結果はすべて相対論の要求を満足していた (ただし，ずっと後になつて行われた Ives の実験は除く)．しかし，これらの測定の精度は v/c に関して1次より高い項を測れるほど十分なものではなかった．そしてこの近似まででは絶対エーテルの概念に立脚する Lorentz の電子論も相対論の要求を満たしていたのである．したがって相対論の要請を実験によって決定的に検証するためには少くとも2次の量を測定できるような実験装置を考案することが大切である．

このことは 1881 年 Michelson‡ によって達成された．彼は第6図の略図で示されるような干渉計によって光の速度を測定した．光源Lを出た光はガラス板Pによってたがいに直角な2つの光線 1, 2 に分けられる．透過光1は鏡 S_1 で反射されてPに戻り，ここでその一部が反射されて望遠鏡Tに入る．同様に反射光2は，鏡 S_2 によって反射されPに戻り，その一部はこのガラス板を透過して望遠鏡に入り，そこで光線1と干渉する．たとえこの装置がエーテルに対して静止していたとしても望遠鏡で見れば干渉縞が観測されるはずである．



第 6 図

さて，この装置で，PS_1 はエーテルに対する地球の運動方向に平行で，PS_1 と PS_2 は同じ長さ l であるとする．エーテルに対する装置の運動によって生ずる光線 1, 2 の間の位相の差 ΔF を計算することは (35) を用いれば簡単である．光線1がPから S_1 に到り，これがふたたびPに戻る時間 t_1 は，(35) で $\boldsymbol{e}'$ がこの往復の間 $\boldsymbol{v}$ に平行であるから

$$t_1=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2l}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2} \tag{62}$$

† G. B. Airy, *Proc. Roy. Soc. London*, A. **20**, 35 (1871); **21**, 121 (1873); *Phil. Mag.* **43**, 310 (1872).

‡ A. A. Michelson, *Amer. Journ. of Science* (3), **22**, 20 (1881); A. A. Michelson and E. W. Morley, ibid, **34**, 333 (1887).

となる．同様に光線2がPからS_2に行きPに戻る時間t_2は，e'がvに直角であるから，(35)により

$$t_2 = 2l(c^2 - v^2)^{-1/2} \tag{63}$$

となる．したがって2次より高い次数の項を省略すれば上に述べた位相差として

$$\Delta F = \nu(t_1 - t_2) = \nu l v^2/c^3 \tag{64}$$

をえる．装置全体を90°廻転し，PS_2がvに平行になるようにすれば，この位相差は$-\Delta F$になる．したがって，このように装置を回転することによって干渉縞が位相の変化にして$2\Delta F$に相当するだけずれなければならない．

干渉縞の間隔を長さの単位にとれば，位相差$2\Delta F$は直接この廻転に伴う干渉縞のずれを与えることになる．Michelsonの実験では$2\Delta F$は約$\frac{1}{3}$であるから，干渉縞の位置が干渉縞の間隔の約$\frac{1}{3}$ずれるであろうことが期待されるわけである．たとえずれがこの百分の一であってもMichelsonは実験の精度からこれを検知できるはずであった．しかし彼はなんの効果をも見出すことができなかったのである．このようにしてわれわれは少くも2次までの精度で相対性原理が正しいことを示す実験に，はじめて出会ったわけである†．

13. 短縮の仮説

Michelsonの実験結果はエーテル仮説にとっては極めて重大な困難を意味していた．Michelson自身は地球が太陽を公転する際にエーテルを一緒に引きずってあるくものと仮定してこの否定的な結果を説明しようと試みた．このように考えれば地表にはエーテルの風はないが，上空では或はエーテルの風が吹いているかも知れない．そこでMichelsonは高い山の上で実験を繰り返してみたけれども，やはり検知できるような効果が全然現われなかった．しかしエーテルが完全に地球に引きずられるという仮定はあらゆる光学的な経験やLorentz電子論と矛盾する．これらによれば屈折性媒質内でエーテルは部分的に引きずられるにすぎないからである．

Michelsonの実験で，エーテルの運動に由来する効果が全く存在しなかっ

---

† Michelsonがえた結果は，後に多くの研究者によって確められた．例えば次を見よ．

R. J. Kennedy, *Proc. Nat. Acad.* **12**, 621 (1926),

K. K. Illingworth, *Phys. Rev.* **30**, 692 (1927),

これに反してMillerは非常に小さくはあるが効果があるという結果を得た．

D. C. Miller, *Rev. Mod. Phys.* **5**, 203 (1933)

を見よ．

たことを説明するため，Lorentz† と FitzGerald‡ は各々独立に，**速度 v で運動する剛体はすべてその運動の方向に縮む**．その縮む割合は $(1-v^2/c^2)^{1/2}$ 倍である，という仮説を提出した．そうすれば Michelson の実験（第6図）で，径路 PS_1 の長さは l でなくて $l(1-v^2/c^2)^{1/2}$ であるが，PS_2 は装置の運動方向と直角なので PS_2 の長さは変らない．したがって時間 t_1 は (62) ではなくて

$$t_1=2l(c^2-v^2)^{-1/2}=t_2 \tag{65}$$

となり，t_1 は (63) で与えられる t_2 に等しくなる．この場合には位相差 $\varDelta F$ は Michelson の実験の通り零になる．

この奇妙な仮説によれば地球の運動方向に直角におかれたとき l_0 なる長さを有する棒は，これを地球の運動方向に平行になるように向けるとその長さが

$$l=l_0(1-v^2/c^2)^{1/2} \tag{66}$$

に縮む．この短縮を直接測定によって知ることは地球上では明らかに不可能であろう．というのはすべての物体，したがって，物指まで同じ割合で縮んでいるからである．しかし，地球の外にあってエーテルに対して静止している観測者は，この短縮を原理上観測できるはずである．すなわちこの観測者には地球やその上のすべての物体が地球の運動方向に縮んでみえるであろう．

この短縮仮説は一見意外なことのように見えるが，Lorentz* が強調したように，絶対動くことができないエーテルという概念を支持する限り，この仮説は不可避である．なぜならば，この絶対エーテルの立場では，例えばこの装置のある部分を熱した場合に干渉縞がずれることが熱せられた部分の長さが変化する証拠とみてよいのと同等な正当さで，Michelson の実験を直接短縮の証拠と見てよいからである．

この仮説をもっと納得できるものとするため，Lorentz はこの短縮の現象を電子論に基いて説明することを試みた．彼は実際 (66) 式にもっともらしい説明を与えることに成功したのである．彼は，物体はすべて荷電粒子からできていて，これが電気力のみで凝集しているものと仮定すれば，このような純電気的な系が全体としてエーテルに対して一様な運動をするとき，各荷電粒子の釣合いの位置が (66) 式にしたがって変化することを示すことができたのである．この説明の難点は，ただ粒子が電気力**のみ**で凝集しているという前提が実在の物質について満足されていると仮定することができないことにある．特に1個

† H. A. Lorentz, *Amst. Verh., Acad. v. Wet.* **1**, 74 (1892).

‡ G. F. FitzGerald. O. Lodge, *London Transact* (A) **184**, 727 (1893), 特に，749 頁を見よ．

* 19 頁の脚註参照．

の電子の荷電がどのようにして凝集しているかということは，電子の内部で電気以外の強い引力が働いていない限り，想像が困難である．実際 Lorentz のしたように1個の電子についても短縮の式 (66) が成り立つものと仮定するならば，この仮定は電子論の諸原理のみでは基礎づけることのできない全くの仮説と見なされなければならない．したがって Lorentz の短縮というものは，自然の一般法則の根柢に横たわる基礎的にして普遍的な現象であると考えられるのである．

14. 相対性原理がすべての物理現象に対して成り立つこと

Michelson の実験は，エーテルに対する地球の運動をきめようとする一連の長い試みのうちのほんの最初のものであった．これら一連の実験は光学的および純電磁的装置を用いて行なわれ，どの場合においてもその結果は完全に否定的であった．すなわちすべての現象は地球の運動に無関係であったのである．結局，力学現象だけでなく，すべての光学および電磁現象に対しても**相対性原理が正確に成り立っている**ということは疑う余地がなくなった．

ここではこれらの実験全部について詳しく議論することはやめにして，§5 で述べた Ives の実験を思い起すだけにしておこう．この実験は，第2次近似で Doppler 効果も，相対性原理の示す通り，観測者に対する光源の相対速度のみにしかよらないことを示すものである．この事実は上に述べた他の実験結果と同様に，たとえ短縮仮説をつけ加えたとしてもエーテル理論だけでは説明できなかった．というのは (22) は長さの次元の量を含んでいない．したがって距離の短縮に関する仮説だけでは (22) 式を Ives の実験でたしかめられた (II. 90) 式に変更することは不可能だからである．

ついで Lorentz† はエーテル理論からえられるあらゆる結論が，今やいろいろな実験によって確かなものとわかった相対性原理にかなったものとなるためには，短縮仮説のほかにどんな仮説を導入すべきであるかという問題を追求した．彼は各慣性系毎に特別な時間，いわゆる局所時を用いることが必要なことを見出した．この局所時は絶対エーテル系の時間とは異ったものである．短縮仮説によれば物指しの長さは考えている慣性系の絶対速度によって変る．この新たに導入した仮説によれば，時計が時刻を刻む速さ，したがって時間の単位も，同様に慣性系の運動の状態によって変ってよいはずである．この局所時および空間変数を用いて動いている慣性系で電子論の基礎方程式を書いてみれば，それはどの慣性系でも同じ形になるとみてよい．したがって電磁現象はす

† 19 頁の脚註参照．

べて準拠系の運動状態に無関係となるべきことになる．こうして，上に述べたいろいろな実験結果がエーテル理論の基礎そのものをゆるがすものであることを Einstein (1905) が見破るまで，こうして，絶対エーテルの概念はつぎつぎといくつかの仮定を導入しながら，その余命を保ったのである．

第 II 章

相対論的運動学

15. 事象の同時性

地球の運動が力学的，光学的，電磁的な諸現象におよぼす影響を見出そうとする試みがすべて失敗したことから，相対性原理があらゆる現象に対して成り立っているという確信が物理学者達の間に起って来た．§2 で述べたように相対性原理の普遍妥当性を認めれば，エーテルなどという絶対系はその物理的な意味を失ってしまうので，このことはわれわれの自然記述の基底を全面的に変えてしまうのは明らかである．相対性原理を認めるときは，あらゆる物理現象はどの慣性系においても同じ推移の経過をたどるので，どの系が絶対系であるかということは，どんな物理実験によっても決めることができない．したがって，あらゆる慣性系は全く同等なものとなり，完全な理論に対してあらゆる慣性系が同等に取り扱われることが要求されなければならない．

この新しい立場を最初に定式化し，それから多くの結論を導き出したのは Einstein で，1905 年の彼の基礎的な論文でこれがなされたのである†．これらの結論のうちの1つについてはすでに §2 で述べた．電磁力学の基礎方程式——Maxwel の方程式——はこんどはすべての慣性系で成り立つべきであるから真空中での光の伝播速度はすべての慣性系で同じ値 $c=3\times10^{10}$ cm/sec. をもたなけばならない．このことは当然われわれが日常経験からえた合成則 (I. 3) で表わされている運動学的概念と矛盾する．このように，相対性原理として表わされている非常に正確な実験からえられた新しい経験は，物理学者達が習慣的に心の中で**先験的**に成り立つものと思い込んでいた運動学的概念の改訂をわれわれに迫っているのである．Einstein は速度の概念，すなわち速度を実際に測る方法の吟味から，相対性原理にかなった，あいまいさのない物理現象記述の可能性が開けてくることを示した．

与えられた慣性系の1点Aから直線にそって他の1点Bに直進する光の信号について考察を進める．光の信号がAからBまで走った間の速度は，AからBまでの距離と光の信号がAからBまで走るのに要した時間の比として定義され

---

† A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **17**, 891 (1905); *Jahrb. d. Radioaktivität und Elekronik*, **4**, 411 (1907).

る．距離の測定には何らの困難はない．ところが光の信号がAで放出された時の時刻と，Bに到着した時の時刻の差を測ることは，よく考えてみるとそれほど簡単なことでないことがわかる．信号放出の時刻 t_1 をAに置かれた時計でよみ，到着の時刻 t_2 をBに置かれている他の時計でよんだとすれば，2つの時計AとBが合っている場合に限り，このようにしてえた時刻の差 t_2-t_1 が光がAからBまで進むのに要した実際の時間を与える．時計が合っているということは，**同時刻に**2つの時計の針が同じ位置を指していることである．それでは，相異なる2つの場所で起った2つの**事象**が同時に起ったということをたしかめるには，どうしたらよいであろうか？

AとBにある時計を合わせるのにいろいろな方法が考えられる．例えば，Aにある時計に合わせた第3の時計をAからBまで持っていき，Bにある時計をこれに合わせてもよいし，またAからBへ送られてきた時報を用いてもよい．ここでは実際上もっとも正確であることが知られている後者の方法について考察することからはじめよう．Aにある時計が零を報じた瞬間にAから時報が発射されるものとしよう．日常生活では時報がBに到着したときBの時計を零に合わせるのが普通であるが，それでは正確でないことは明らかである．なぜならば時報は有限の速度で伝わるからである．もし非常に正確にしようと思うなら，時報が到達したとき，時計を l/u に合わすべきである．ただし l はAとBの距離，u は時報の速度である．このような補正をするには時報の速度を知らなければならないが，上に述べた通り，速度を測るにはちがった場所にある2つの時計が合わされていることが前提となっている．ところが時計を合わせる問題を解決するのに時報の助けをかりなければならぬのである．AからBへ第3の時計を運ぶことによってAとBにある時計を合わせようとしても同様なことになってしまう．この場合にも時計を運ぶことによって，時計の進みが影響をうけるかも知れないから，運ばれる時計にその補正をしなければならない．ところが実験でこれを知るには，相異なる場所にあって，合っていることがたしかな2つの時計の存在を予想しなければならない．この場合にもわれわれは堂々めぐりにおちいってしまう．

どのような時計の合わせ方を考えてもこの同じ根本的な困難にぶつかるのである．相異なる場所の2つの事象が同時に起ったという概念は正確な客観的意味をもっていない．なぜならば，この同時性を保証すべきいかなる実験的方法を見出すこともできないからである．したがって速度についても同様である．Einstein が強調したように，われわれは先ず同時とは何であるかを**定義**してかからなければならない．ところが概念を定義する際は，われわれにある程度

の自由が許される．それで以下に述べるように，光の速度がどの慣性系でも c に等しくなるように同時を定義することが可能になる．

16. 同時ということの相対性

われわれは任意の慣性系 I 内の，同じ場所におかれてある限り，同じ速さで時を刻む時計（標準時計）をたくさんもっているものとする．これらの時計は I の中のあらゆる場所に配置されているとしよう．これらの時計を合わせるのに光の信号を用いることにする．それというのも，光の伝播に関する限り実験的に非常に多くのことを知っているからである．例えば Fizeau の実験またはこれに類似なもっと精密な測定によれば，光がある閉多角形にそってまわるのに要する時間は，多角形の全長と Maxwell の方程式中に現われる普遍定数 c の比に等しい．この時間は多角形上の一定点に置かれた **1 個**の時計で測ることができるので，同時性の定義には無関係であり，距離は I に対して静止している標準物指で測ればよい．

さて任意の 1 点 O を基準点にして，I の中のいろいろな場所に置かれた時計を合わせるため，O からあらゆる方向に光の信号を発射する．O にある時計は，信号が発せられた瞬間に時刻 t_0 を指していたものとする．この信号がある任意の 1 点 P に到達したとき，そこの時計を $t_0+\dfrac{l_0}{c}$ に合わせる．ただし，l_0 は I の中に静止している標準物指で測つた O と P の間の距離である．このようにして，慣性系 I の中にある時計を一意的に合わせることができる．任意の 2 点 P と P_1 で起つたできごとが同時であると云うのは，その事件が起つたとき，P および P_1 にある時計が同時刻を指していることである．同時ということをこのように定義することは，それがいかなる不合理なことをも含んでいないということが示されてはじめて，完全に正当なものといえる．そのためには次の 2 つの条件が満たされなければならない．

1. 時計を合わせるための信号より τ 秒だけおくれて，時刻 $t_0+\tau$ に O を発した信号は，τ 秒だけおくれて，すなわち P 点にある時計が時刻 $t_0+\dfrac{l_0}{c}+\tau$ を指す瞬間に，点 P に到達せねばならない．この条件は，時計を合わせるという操作が，それが行われた時刻に無関係でなければならないことを意味するものである．
2. この方法は，時計を合わせる基準点にとった点の選び方に無関係でなければならない．

はじめの条件が満たされていることには疑いの余地がない．なぜなら 1 つの

慣性系内ではすべての点は同等で，ともにOに置かれたとき，同じ速さで時を刻む2つの標準時計は，相異なる2点OとPに置かれた場合にも同じ速さで時を刻むであろうからである．

条件2に関しては，任意の1点 P_1 にある時計が時刻 t_1 を報じた瞬間に P_1 から発射された光の信号が任意の点Pに到達したとき，Pにある時計が時刻

$$t=t_1+\frac{l}{c} \tag{1}$$

を指しているであろうことを示せば十分である．(1) 式を証明するのに，簡単のためOを発した時報が P_1 に到達した瞬間 t_1 に P_1 から信号が発射されたものと仮定する．すなわち，

$$t_1=t_0+l_1/c \tag{2}$$

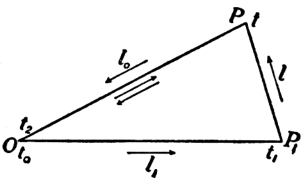
とする．

P_1 からの信号がPに到達した瞬間，これをさらにOに送れば，それがOに達する時刻 t_2 は上にのべた (Fizeau の) 実験結果により

$$t_2=t_0+(l_1+l+l_0)/c \tag{3}$$

である．なぜなら，光の信号が全長 l_1+l+l_0 の三角形の経路を通ったからである (第7図を見よ)．

P_1 からの信号がPに達したとき，Pにおける時計が時刻 t を示していたとする．またOからの時報がPについたときPの時計を $t_0+\frac{l_0}{c}$ に合わせたとする．この時報をただちにOに送りかえせば，Fizeau の実験により，これがOに戻るのは，Oにある時計が時刻 $t_0+2\frac{l_0}{c}$ を指すときである．P_1 からの信号はOからの時報がPより送りかえされる時刻より $\tau=t-\left(t_0+\frac{l_0}{c}\right)$ 秒だけおくれてPからOに送り出されるから上の仮定1によって，これがOに到達するのは，Oにある時計が時刻



第7図

$$t_2=t_0+2l_0/c+\tau=t+\frac{l_0}{c} \tag{4}$$

を指すときである．この時刻は (3) で与えられる時刻 t_2 と同じものである．したがって (3)，(4) および (2) から

$$t=t_0+(l_1+l)/c=t_1+l/c$$

をえる．これは証明しようとした (1) 式に他ならない．

上述のように，時計の調整法が調整の基準点の選び方に無関係であり，この

ようにして，慣性系Iの中で相次いで起る事象を記録する一定の方法が確立されたことになる．点Pにある標準時計が時刻tを指している時，点Pに起った事象を単に時刻tに起った事象ということにする．このようにすれば，速度という概念もまた正確な意味をもつことになる．特に光について考えれば，それがどの方向に進んでも速さが一定の値cをとるのは明らかである．なぜなら，任意の点 P_1 で任意の時刻 t_1 に発射された光の信号は距離lだけ距った他の任意の点Pに時刻 t_1+l/c に到達するからである．

さて他にもう一つ慣性系 I' を考え，この系にもIで用いたものと同じ構造の標準時計がたくさん配置されているものとする．これらの時計は I' の中の各点に配置され，I' の中の任意の1点 O′ から発射される光の信号によってIの場合と同様にして合わされているものとする．I' の中での距離はすべて I' の中に静止している標準物指で測られているものと考えることにしよう．またこの物指はIで用いたものと同じ型のものであるとする．その意味は，両者を互に静止させたとき，両者が同じ長さであるということである．相対性原理によればI'の中での Fizeau の実験はIの中で行った場合と同じ結果を与えるから，この方法で I' の中の時計を合わせることによって矛盾を含まない時間の記述のし方がえられることは明らかである．

距離や時間を I' の中の時計と物指で測るときは，I' に対する光の速度があらゆる方向に向ってcであることはIの場合と同様にして示すことができる．I' 系中の点 P′ にある時計が時刻 t' を指しているとき，P′ に起った事象は I' 系での時刻t'に起ったと云う．この時刻は一般にI系で同じ事象が起った時刻 t とは異なる．I' 系で同じ時刻 t' に起った相異なる2つの事象は I' 系において同時に起ったと云う．

このように同時という概念は，その絶対的な意味を失ってしまう．そのわけはI系中の観測者にとっては同時に起っている2つの事象も，I'系中の観測者にとっては一般に同時ではないからである．例えばI中に固定された2点 A, B に起った2つの事象を考えよう．光の速度はあらゆる方向に対してcであるから，この2つの事象がI中で同時に起つたということの判定には，事象が起った瞬間にAとBから発射された光が AB の中点Cで出会うことを判定の条件に用いればよい．I'系でも同じ判定条件によって同時を判定することができる．さて，この2つの事象はI系で同時に起ったものとし，A, B を結ぶ線分は，例えばIに対する I' の速度 $\boldsymbol{v}$ の方向に平行であるとしよう．いま，これらの事象が起った瞬間に，A, B と重なり合うような I' 系中の2点 A′, B′ を考える．そうすれば A′ と B′ の中心 C′ は (I 系で) C と一致するだろう．C′ は

A′, B′ と同様 I' と共に I に対して速度 v で動いているから，AとBから出た光の信号がCで出会う瞬間には C′ とCは一致していない．よって，この信号は C′ では出会わない．したがって上に述べた判定条件によれば，I' 系ではこの2つの事象は同時でないことになる．

空間の異なる2点で事象が同時に起つたという概念は与えられた慣性系についてのみ正確な意味をもつだけである．観測者の運動状態とは無関係に，絶対的に同時ということが云えるのは，他のあらゆる速度に比べて光の速度が無限に大きいと見なしうる近似でのことである．日常生活や物理学上多くの場合についてこのような近似は十分成り立っている．これが絶対時間や絶対的同時性ということが根強く信じ込まれていたことの理由である．

17. 特殊 Lorentz 変換

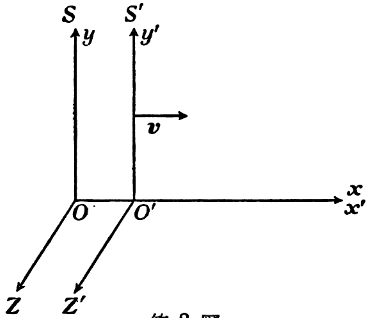
ある慣性系 I において，時刻 t に1点Pで起った事象は，点Pを指定する3つの座標および時間変数 t の4個の数を用いて記述することができる．この4個の数を事象の時空座標とよぶ．たとえば直交座標系を用いて，点Pの座標を $\boldsymbol{x}(x, y, z)$ で表わせば，事象の時空座標は $\{x, y, z, t\}$ である．そしてこれらの座標 x, y, z は座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ を x, y, z 各軸へ射影したものの長さを慣性系 I に対して静止している物指を用いて，測ったものであり，t は点Pに置かれた標準時計を用いて測られる．

このようにして，ある慣性系 I に1つの時空座標系 S を固定させることができる．1つの慣性系に固定させる時空座標系 S にもいろいろある．上述の直交座標もその1つであるが．この代りに極座標を用いて空間内の各点を記述することもできる．しかし時空座標系はある慣性系に固定して定めるから，時空座標系がきまるということは当然それが固定している慣性系 I も与えられているということになる．慣性系 I は運動を記述する準拠系であり，座標系 S はこの準拠系に張られた網の目にあたり，違う概念である．しかし特殊相対性理論の範囲では時空座標系 S のみでつねに事が足りるので，運動を記述する準拠系と時空座標系とを区別して用いる必要はない．ところが一般相対性理論にはいると，この両者を区別する必要が生じてくる．

さて I の外にもう1つの慣性系 I' で事象を観測するときは，この事象はこの慣性系に固定した時空座標系 S' で測った4つの時空座標 (x', y', z', t') で記述される．この座標 (x', y', z', t') はやはり I' に対して静止している物指と標準時計を用いて測られる．

ここでわれわれの第1になすべき仕事は同じ事象をそれぞれ2つの座標系 S

および S' で測った時空座標系の間の関係，すなわち非相対論的運動学の場合の Galilei 変換 (I. 1) に対応する変換を見出すことである．まず，座標系 S に対して一様な併進運動をしている物体は，座標 S' に対してもやはり一様な運動をするはずであるから，変数 $(x', y', z'. t')$ は変数 (x, y, z, t) の 1 次函数でなければならない．



第 8 図

つぎに簡単のために S 系の各軸と S' 系の各軸とがそれぞれ互に平行であり，また S' は S に対してその x 軸の正の方向に速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとする．さらに時刻

$$t=t'=0$$

において S' 系の原点 O′ が S 系の原点 O と一致していたとする．

S' 系において $x'z'$-平面に平行な平面

$$y'=a'=\text{一定} \tag{5}$$

を構成するすべての点は S 系においても，やはり xz-平面に平行な平面を構成するはずである．この平面を

$$y=a=\text{一定} \tag{6}$$

とする．a' はこの平面と $x'z'$-平面との距離，a は xz-平面との距離を示している．xz-平面と $x'z'$-平面とは重なっているが，a' を測る物指と a を測る物指とは運動状態が違っているので，a' と a の比

$$\kappa=a'/a \tag{7}$$

は 1 に等しくないという可能性もありうる．しかし次のような考察によって κ が 1 に等しいことがわかる．いま x-, z-, x'-, z'- 各軸の正の方向を逆にすると，S 系が S' 系に対して x'-軸の正の方向間に速度 v で運動することになり，S 系と S' 系とが役割を交換する．κ は相対速度 v のみで定まり，また運動の相対性より S 系の S' 系に対する関係は，軸の向きを変える前の S' 系の S 系に対する関係と同じでなければならないから，軸の向きを変えたのちには

$$\kappa=a/a' \tag{8}$$

でなければならぬ．(7) と (8) より $\kappa^2=1$ がえられる．一方 y-軸と y'-軸の正の方向は前と同じであるから a と a' の符号も前と同じであるから

$$\kappa=1, \qquad a'=a \tag{9}$$

でなければならぬ．この結果，S 系での座標が y である点に起った事象の，S'

系での座標を y' とすれば,

$$y'=y \tag{10}$$

が成立する. 同様にして z-座標についても

$$z'=z \tag{11}$$

が成立する. (10), (11) がy-, z-座標に関する変換式である.

残る座標 x, t の変換式は, 光の信号がS系においても S' 系においても同じ速度cであらゆる方向に伝播していくという事実を用いて求めることができる. いま光の信号が時刻 $t=t'=0$ にちょうど一致した原点Oと O′ から発射されたとすれば, この球面波の伝播を表わす方程式はS系では

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \tag{12}$$

であり, S' 系では

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \tag{12'}$$

で示される. いま

$$s^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2, \tag{13}$$

$$s'^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \tag{13'}$$

とおくと, $s^2=0$ をみたすようなどの変数の組 (x, y, z, t) に対しても, それに対応する s'^2 は0でなければならない. さらに (x', y', z', t') と (x, y, z, t) を結ぶ関係式は1次式である. この2つの条件は s'^2 が s^2 に比例するときにのみ可能である.

$$s'^2=\kappa(v)s^2. \tag{14}$$

この比例定数 κ は S 系と S' 系間の相対速度vにのみよる定数である. 関係式 (8) を導くときに用いた運動の相対性によって, この比例定数κも1に等しくなければならない. したがって (14) 式は

$$s'^2=s^2 \tag{15}$$

となる. このようにして (13) 式で定義された s^2 という量は1つの不変量であることがわかる. (10) 式と (11) 式とより, (15) 式は

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2 \tag{16}$$

と書かれる. (16) 式は任意の事象についてみたされるべき関係式であるから, x' と t'とは共にxとtのみの1次函数でなければならぬ. したがって x' と t' とはそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} x'&=\alpha x+\beta t,\\ t'&=\gamma x+\delta t \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

で表わされる. 定数 α, β, γ, δ は (16) がxとtのあらゆる値に対して成立するという条件からきまる.

S' 系の原点 O′ では $x'=0$ であるから，(17) 式より O′ の S 系に対する運動を表わす式は

$$x=-\beta t/\alpha$$

で与えられる．一方 O′ の S 系に対する速度は v であるから，上式より

$$\beta=-\alpha v \tag{18}$$

がえられる．一方 S 系の原点 O では $x=0$ である．これを (17) 式に入れて t を消去することによって，O の S' 系に対する運動を表わす方程式

$$x'=\beta t'/\delta$$

が求められる．他方，対称性の考えから O の S' 系に対する速度は $-v$ でなければならない．これと (18) 式とより

$$\beta=-\delta v=-\alpha v, \quad \text{すなわち} \quad \delta=\alpha \tag{19}$$

が成立する．(18) 式と (19) 式とより (17) 式は

$$\left.\begin{aligned} x'&=\alpha(x-vt), \\ t'&=\gamma x+\alpha t \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

という形に書き改められる．(20) 式を (16) 式に代入すれば

$$x^2-c^2t^2=(\alpha^2-\gamma^2c^2)x^2-\alpha^2(1-v^2/c^2)c^2t^2-2\alpha(\gamma c^2+\alpha v)xt \tag{21}$$

がえられる．(21) 式は独立変数 x, t のあらゆる値について成立すべき式であるから，左右両辺の x^2, t^2 および xt の係数がそれぞれ等しくなければならない．この条件から α, γ を定めるための式が 3 つえられる．t^2 の係数の関係式より

$$\alpha=(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{22}$$

がえられ，xt の係数の関係式から

$$\gamma=-\alpha v/c^2=-\frac{v/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \tag{23}$$

がえられる．残りの x^2 の係数が左右両辺で等しいという関係式は，(22) 式と (23) 式とが成立すれば恒等的に成立する．これは O の S' 系に対して速度 $-v$ で運動するという仮定を導入することによってえられた関係式 (19) が (16) 式と矛盾しないものであることを示している．

(10), (11), (20), (22) および (23) 式をまとめ，任意の事象の時空座標に関して次の変換式がえられる．

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{x-vt}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}, \qquad y'=y, \qquad z'=z \\ t'&=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

(24) の4個の方程式を変数 x, y, z, t について解けば，(24) の逆の関係式

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \quad y=y', \quad z=z' \\ t&=\frac{t'+vx/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{24'}$$

が求められる．(24′) は (24) で ′ を付した変数とそうでない変数を交換し，v の代りに $-v$ とおけばえられる．

(18) 式中の v は O′ の S 系に対する速度として導入された量であるが，(24) 式より S' 系中の任意の固定点 P′ (座標 x', y', z') も S 系に対してその x-軸の正の方向に速度 v で運動することになる．同様に (24′) 式を見れば，S 系中の任意の固定点Pは S' 系に対してその x'-軸の正の方向に速度 $-v$ で運動していることがわかる．このように v という量は2つの慣性系の相対速度を表わしている．

変換式 (24) と (24′) を最初に導いたのが Lorentz で，この変換式をふつう Lorentz 変換と呼んでいる．だが相対性理論の基礎法則からこれらの変換式を導き出したのは Einstein† である．また第8図に見るように S' 系の直交座標軸は特別なものなので，本書ではこの変換を**特殊** Lorentz 変換とよぶことにする．この変換では (13) 式で定義された量 s^2 は不変量である．(24) 式で $c=\infty$ とすれば (24) 式は特殊 Galilei 変換 (I. 2) に移行する．

18. Lorentz 変換の最も一般的な形

S' と S の相対速度が x-軸に平行でなく，S と S' でしかも直角座標がお互に任意の向きに設定されているような，もっと一般の場合に時空座標を変換することは，Lorentz 変換 (24) と S および S' 系内における空間回転とを適当に組み合わせることによって行うことができる．空間回転に対しても，s^2 は不変であるから，このもっと一般的な Lorentz 変換に対しても s^2 は不変である．

この一般の場合に対する Lorentz 変換の式もときに必要になることがあるが，それを表わすのに次のベクトル表示を用いるのが便利である．はじめ，第8図に示したような特別な関係位置にある座標間の特殊 Lorentz 変換をもう一度考えることにしよう．同じ事象の起った点を S と S' で見た際の空間的位置を表わす2つのベクトル

$$\boldsymbol{x}=(x, y, z), \quad \text{と} \quad \boldsymbol{x}'=(x', y', z')$$

---

† 例えば A. Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1917 を見よ．

を，同一のベクトル空間内の2つのベクトルを表わすものと考えなおすことにし，(x,y,z)，および (x',y',z') をこの抽象3次元ベクトル空間中に**固定された**座標系に関する，この2つの仮想ベクトルの成分と考えなおすことができる．この同じベクトル空間で，S に対する S' 系の速度を表わすベクトル $\boldsymbol{v}$ は，成分が $(v,0,0)$ であるような1つのベクトルとして記述する．そうすれば特殊 Lorentz 変換 (24) は，ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{v}$, および変数 t, t' の間の次のような形の関係として表わされることは明らかである．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}'&=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\left[\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})}{v^2}\{(1-v^2/c^2)^{-1/2}-1\}-t(1-v^2/c^2)^{-1/2}\right]\\ t'&=(1-v^2/c^2)^{-1/2}\{t-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})/c^2\}\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

ここで，$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})=v_x x+v_y y+v_z z$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$ のスカラー積である．(25) 式でベクトル方程式の3つの成分は，(24) 式のはじめの3式と同じものであることがすぐにわかるであろう．

S' 系に対する S 系の速度を表わすベクトル $\boldsymbol{v}'=(-v,0,0)$ を考えれば，逆変換 (24′) は明らかに次の形に書ける．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{v}'\left[\frac{(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}')}{v^2}\{(1-v^2/c^2)^{-1/2}-1\}-t'(1-v^2/c^2)^{-1/2}\right]\\ t&=(1-v^2/c^2)^{-1/2}\{t'-(\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{x}')/c^2\}\end{aligned}\right\}\quad(25')$$

$$\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}\quad(26)$$

であるから，この場合，(25′) 式は (25) 式で $(\boldsymbol{x}'\cdot t')$ と $(\boldsymbol{x}\cdot t)$ をとりかえ，$\boldsymbol{v}$ を $-\boldsymbol{v}$ おきかえればえられる．

S 系中で直角座標軸を回転すれば $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{v}$ の成分は直交変換をうける．そして抽象ベクトル空間中の座標軸は不変であると考えているのであるから，S 中の直交座標軸の回転によって，仮想ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ は，これと逆の回転をうける．このとき $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{v}'$ は変化しない．同様に S' 中の直交座標軸の回転に対応して仮想ベクトル $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{v}'$ は逆向きに回転する．

そこで，まず S および S' 中の直角座標軸が（第8図の位置から出発して）**同じ**回転をうける場合を考えることにしよう．このことは変数の組 (x,y,z) および (x',y',z') が同じ係数の直交変換をうけることを意味する．このときは，仮想ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{v}'$ は同一の回転をうけるので，これらの仮想ベクトルの間には (25), (25′) および (26) で与えられる関係が成り立つはずである．この場合を回転を伴わない Lorentz 変換と云う．それは，S および S' のの直交座標軸を第8図のような関係位置にもっていくのになすべき（それぞれ S, S' 系で測った）回転の角が同じだからである．いわば S および S' 内の直交座標

軸は同じ向きをもっているのである(ただし§19の考察を参照せよ).

S系に対するS'系の速度の成分をv_x, v_y, v_zで表わし, $\gamma=(1-v^2/c^2)^{1/2}$と書けば, ベクトル方程式(25)は次の式を簡単にまとめて書いたものに過ぎない.

$$\left.\begin{aligned}
x'&=\{1+(\gamma-1)v_x^2/v^2\}x+(\gamma-1)\frac{v_xv_yy}{v^2}+(\gamma-1)\frac{v_xv_zz}{v^2}-v_x\gamma t\\
y'&=(\gamma-1)\frac{v_yv_xx}{v^2}+\{1+(\gamma-1)v_y^2/v^2\}y+(\gamma-1)\frac{v_yv_zz}{v^2}-v_y\gamma t\\
z'&=(\gamma-1)\frac{v_zv_x}{v^2}x+(\gamma-1)\frac{v_zv_y}{v^2}y+\left\{1+(\gamma-1)\frac{v_z^2}{v^2}\right\}z-v_z\gamma t\\
t'&=-\gamma v_xx/c^2-\gamma v_yy/c^2-\gamma v_zz/c^2+\gamma t.
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

したがって, この式が回転を伴わない場合のLorentz変換を表わす式である. (26)により, この式の逆変換(25)′は, (27)で変換(x, y, z, t)と(x', y', z', t')を入れかえ, (v_x, v_y, v_z)の代りに$(-v_x, -v_y, -v_z)$を代入することによってえられる.

次にSおよびS'系中の直交座標軸が同じ向きをもっていない場合に進むことにしよう. 今度は第8図に示したような関係位置までもってくるのにSとS'系の直交座標軸にそれぞれ異った回転を行わなければならぬことに, まず注意せねばならない. (25)の最後の式は, そのまま成り立つが, 最初の式は

$$\mathfrak{D}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{v}\{(\gamma-1)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})/v^2-\gamma t\}\quad(28a)$$

でおきかえなければならない. ここで$\mathfrak{D}$は仮想ベクトル$\boldsymbol{x}'$を回転を伴わぬLorentz変換に対応する仮想ベクトル$\mathfrak{D}\boldsymbol{x}'$に移す回転の演算子である. したがって$\mathfrak{D}^{-1}$は$S'$系における直交座標軸を$S$系の軸と(上に述べた意味で)同じ向きになるまで回す回転を表わす. (26)の代りに

$$\mathfrak{D}\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}\quad(29)$$

をえる. すなわち, この場合にはS'に対するSの速度成分(v_x', v_y', v_z')は$(-v_x, -v_y, -v_z)$に等しくないのである. (28a)にこの逆演算子$\mathfrak{D}^{-1}$を作用し, (29)を適用すれば, この一般の場合Lorentz変換は次の形に書ける.

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{x}'&=\mathfrak{D}^{-1}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}'\{(\gamma-1)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})/v^2-\gamma t\}\\
t'&=\gamma\{t-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})/c^2\}.
\end{aligned}\right\}\quad(28b)$$

$\mathfrak{D}$はSおよびS'系中の軸を同じ向きにもっていくためS中の軸に行わなければならない回転と解されるものである. ゆえに, (28b)の逆関係は

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{x}&=\mathfrak{D}\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{v}\{(\gamma-1)(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}')/v^2-\gamma t'\}\\
t&=\gamma\{t'-(\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{x}')/c^2\},\qquad v'=|\boldsymbol{v}'|=|\boldsymbol{v}|=v
\end{aligned}\right\}\quad(28')$$

となる．この関係は，(28′) を (28b) の右辺に代入することによって直接証明することもできる．

(25) と (28) 式は (15) 式を満足することは容易に示される．(15) 式はベクトル形式で

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})-c^2t^2=(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}')-c^2t'^2 \tag{30}$$

と書くことができる．$c=\infty$ とおけば (25) は Galilei 変換の一般の場合 (I. 1) になる．

今までわれわれは時刻 $t=t'=0$ で原点 O と O′ が一致していると考えてきた．したがってこの Lorentz 変換は時空座標に関して**斉次式**であった．さて今度はこの仮定を捨て，S' 系で時空座標の原点をずらすことを考えよう．このことは，(24)，(25) と (28) 式で (x', y', z', t') を $(x'-x_0', y'-y_0', z'-z_0', t'-t_0')$ でおきかえるべきことを意味する．ここに x_0', y_0', z_0', t_0' は定数である．このような型の非斉次 Lorentz 変換によっては，s^2 はもはや不変ではない．しかし，座標がそれぞれ (x_1, y_1, z_1, t_1) と (x_2, y_2, z_2, t_2) であるような 2 つの事象を考えれば，この 2 つの事象の座標の差

$$\varDelta x=x_1-x_2, \qquad \varDelta y=y_1-y_2, \cdots\cdots$$

には定数 x_0', y_0', z_0', t_0' が現われてこないので，この差は**非斉次 Lorentz** 変換に対しても，(25)，(28) 式によって変換される．したがって，

$$\varDelta s^2=\varDelta x^2+\varDelta y^2+\varDelta z^2-c^2\varDelta t^2 \tag{31}$$

で定義される量 $\varDelta s^2$ は任意の非斉次 Lorentz 変換に対して不変である．

相対性原理によれば，すべての物理現象はどの慣性系においても同じ推移の経過をたどり，また現象の理論的な記述に際しては，すべての慣性系は同等に取り扱われなければならない．つまり，物理学の基礎方程式はすべての慣性系で同じ形をしていなければならない．換言すればこれら基礎方程式は Lorentz 変換によって，**その形を変えない** (form-invariant) すなわち，**共変** (covariant) でなければならない．相対性原理の形式的表現であるこの要求は，新しい理論を展開する際に非常に便利なものであることがわかってきた．

以下に示すように，**真空中における** Maxwell の電磁力学の基礎方程式は，自働的に Lorentz 変換に際してその形を変えてはいけないという要求を満足している．ところが，Newton の力学の基礎方程式はこの要求を満足していない．なぜならば，すでに 3-4 頁で示したように，これらの式は Galilei 変換に対して共変だからである．したがって，Newton 力学は，Lorentz 変換と Galilei 変換が等しいと見なされるような近似，すなわち，問題に現われてくる速度がみな光速度に比べて小さな場合にのみ成り立つのである．しかしなが

ら，光速度と同程度の大きさの速度が現われるような力学現象に対しては，Newton の方程式は Lorentz 変換に対して共変な，Einstein の**相対論的**力学方程式 (第 III 章参照) でおきかえなければならぬ．

19. 運動物体の短縮

Lorentz 変換 (24) 式を用いると，2つの座標系 S, S' のおのおのの物指と時計を比較したときの相互関係についていくかの結果がえられる．第8図の x'- 軸に平行におかれた S' 系に固定した物指の両端の座標を x_1', x_2' とすると，x_1', x_2' は明らかに不変であり，S' 系での物指の長さ (すなわち静止状態の長さ) は

$$l^0 = x_2' - x_1'$$

である．この物指の両端の S 系に対する運動は (24) 式より次の方程式で表わされる．

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= vt + (1 - v^2/c^2)^{1/2} x_1' \\ x_2(t) &= vt + (1 - v^2/c^2)^{1/2} x_2', \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

さて S 系におけるこの物指の長さ l は同時刻における両端の座標の差で定義するのが当然である．もちろん，この場合の同時とは S 系において同時ということである．そこで (32) 式より l は

$$\begin{aligned} l &= x_2(t) - x_1(t) = (x_2' - x_1')(1 - v^2/c^2)^{1/2} \\ &= l^0(1 - v^2/c^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{33}$$

となって時刻 t にはよらないことがわかる．逆に，S 系と S' 系とは完全に同等であるから，x-軸に平行に S 系に固定した S 系での長さ l^0 の物指の S' 系での長さはやはり (33) 式で与えられる l である．

他方 x-軸に垂直におかれた物指の長さは，S 系でも S' 系でも同じであることが (24) 式よりわかる．そこで次のような一般的な結論がえられる．すなわち任意の慣性系 I に対して速度 v で運動している物体は，その運動方向の長さが (33) 式で示されるように短縮し，運動方向に垂直な方向の長さは物体の運動にかかわりなく一定である．したがって，この物体の体積，すわなちこの物体と同じ運動をしている慣性系で測った体積を V^0 とすれば，S 系でのこの物体の体積 V は

$$V = V^0(1 - v^2/c^2)^{1/2} \tag{34}$$

で与えられる．

(33) 式は Lorentz の関係式 (I.66) と同じであるが，その物理的な解釈を

するさいの原理は全く異なっている．(I.66) 式で l^0 はエーテルに対して静止している物指の長さであり，l はその物体がエーテルに対して速度 v で運動しているときの長さであった．すなわち Lorentz のそもそもの観点では，物指には，**観測者**の運動状態とは独立な絶対的な長さという量が賦与できることになる．ところが (33) 式においては，l^0 は物指と共に運動している慣性系における物指の長さ，すなわち物指の静止状態の長さであり，l はその物指が速度 v で運動している慣性系で測った長さである．そこで，相対的論的な観念にしたがえば，物指の長さという概念はある慣性系に関連させたときにのみ一義的に明確な意味をもち，かつ長さは慣性系が違えば違ってくる．このようにして相対論的な立場では，長さという概念は絶対的な意味を失ってしまい，ただ光速度が無限に大きいと見なせる近似においてのみ絶対的な長さを論ずることができる．上述のように運動している物指の長さを定義するときには同時という概念が必要となるが，Einstien は原理的には時計を用いなくても (33) 式が実験で検証できることを次のようにして指摘した．静止の長さが共に l^0 の 2 つの物指を M_1, M_2 とし，M_1 は S 系の x-軸方向に速度 v で，M_2 は同じ方向に速度 $-v$ で運動しているとする．物指の長さは (33) 式より速度の 2 乗できまるから，M_1, M_2 の S 系で測つた長さは共に l でこれは一定である．このことから M_1 と M_2 とが全く重なる時刻が必ずあることになる．換言すれば，M_1 の両端と M_2 の両端がそれぞれ一致するという 2 つの現象は S 系においては同時に起る事象でなければならぬということである．S 系で両端の一致の起った 2 点を A, B として，S 系での標準の物指で AB 間の距離を測定すれば，その長さが l を示すことになる．

以上の考察から，(33) 式を検証できるほどの高い精度の実験がたとえ現実にはできないにしても，(33) 式で示される Lorentz 短縮が原理的には実験によって観測可能な効果であることがわかる．しかも Lorentz 短縮は運動している物指そのものの特性を示すというよりも，たがいに運動している物指の間に成立する相互関係を表わしている．すると次にはこの短縮の原因が当然問題になってくる．相対性原理の立場によれば，慣性の法則の発見後は外から作用を受けない物体がなぜ等速直線運動を続けるのかという問題が不当であるというのと同じ意味で，この問題が不当であるといわざるをえない．作用を受けない物体がなぜ等速直線運動をするのかという問題は Aristoteles 的な物理学では確かに正当でありえたが，Galilei が慣性の法則を発見してからはそれは意味のないものとして棄てるべきものとなった．Galilei-Newton 力学においては，因果的記述の対象になるのは一様な併進運動からのずれのみである．

Lorentz はこの短縮現象を電子論を基盤として説明を試みたのであるが，相対性原理のみを基盤として Einstein が導きだした関係式 (33) から見れば，この短縮現象はより根本的な性格をもっていることになる．すなわち，この短縮は物体の原子論的理論の基盤にたって**説明される**べき現象として取り扱ってはいけなくて，さらに基礎的な現象にさかのぼることができない**根本的**な事象として受けとらなければいけないのである．これは，どんな原子論ができてもそれが満足しなければならぬ Lorentz 変換に対して法則が共変性をもつべきであるという要請の1つの表現にほかならない．これを他面からいえば，もしこの要請がみたされていれば，巨視的な物体が運動しているために生じた短縮は，物体の原子構造に関する理論から導くことができるということである．

この節を終るに当って，時空座標間の関係が回転を伴わない Lorentz 変換で与えられる場合にはどうなるかという，少し一般的な場合を論じてみる．いま座標系 S' 内の2固定点 P_1', P_2' の座標ベクトルを $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$ とすると，この2点を結ぶ直線は S' 系の不動ベクトル $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{x}_2'-\boldsymbol{x}_1'$ を表わす．時刻 t における点 P_1' と P_2' の S 系における座標ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は (25) 式においてそれぞれ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}_1'$ および $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}_2'$ とおいてえられる．この2つの関係式の差を作り $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$ とおけば

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\{(1-v^2/c^2)^{-1/2}-1\}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})}{v^2} \tag{35}$$

がえられる．ここで $\boldsymbol{r}$ は S 系における P_1' と P_2' の同時刻における位置を結ぶベクトルである．ここで $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\parallel}+\boldsymbol{r}_{\perp}$ のように $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{v}$ に平行な成分 $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ と垂直な成分 $\boldsymbol{r}_{\perp}$ に分け，$\boldsymbol{r}'$ も同様に $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_{\parallel}'+\boldsymbol{r}_{\perp}'$ と2つの成分に分ければ，(35) 式は

$$\boldsymbol{r}_{\parallel}'=\boldsymbol{r}_{\parallel}(1-v^2/c^2)^{-1/2}, \qquad \boldsymbol{r}_{\perp}'=\boldsymbol{r}_{\perp},$$

のように分けて書かれる．この結果から $\boldsymbol{v}$ に平行な成分のみが Lorentz 短縮を受けることがわかる．(35) 式に対する逆の関係式が

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\{(1-v^2/c^2)^{1/2}-1\} \tag{35'}$$

であることは，(35′) 式を (35) 式の右辺に代入すれば，ただちに確かめることができる．

(35′) 式によれば，S' 系において x- 軸に平行な不動ベクトルは S 系の観測者から眺めたときには一般には x- 軸に平行ではない．このように回転を伴わない Lorentz 変換の場合においてすら，S' 系の直交座標軸は S 系の観測者からは一般には S 系のこれに対応する軸に平行とは見えないのである．したがっ

て回転を伴わない Lorentz 変換において S と S' の相対応する直交座標軸の方向が同じであるという場合には，それは 39 頁で述べた取り扱い法での意味に了解しなければならぬ．S' 系の2つの不動ベクトル $\boldsymbol{r}_1'$, $\boldsymbol{r}_2'$ が $(\boldsymbol{r}_1'\cdot\boldsymbol{r}_2')=0$ をみたしているときには $(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)\neq 0$ になることは容易にわかる．したがって S' 系の直交座標軸を S 系から眺めれば各軸は一般には互に直交しなくなってしまう．このような事情があるのでベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ とを 39 頁で導入したよう抽象ベクトル空間に写像する必要があったのである．

20. 運動している時計のおくれ．時計の背理

S' 系で x'- 軸上 $x'=x_1'$ なる点 (第8図) に静止している標準時計 C' を考える．時計 C' が時刻 $t'=t_1'$ を刻むとき，その瞬間 C' が通りすぎる点にある S 系の標準計時は Lorentz 変換 (24′)

$$t_1=\gamma(t_1'+vx_1'/c^2) \quad (\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2})$$

によって与えられる時刻 t_1 を刻むであろう．

それから少し後，C' が $t'=t_2'$ を刻むときには S 系で時刻

$$t_2=\gamma(t_2'+vx_1'/c^2)$$

を刻む別の時計と重なっているであろう．この2つの式の差を求めることにより

$$\Delta t=t_2-t_1=\gamma(t_2'-t_1')=(1-v^2/c^2)^{-1/2}\Delta\tau \tag{36}$$

をえる．すなわち，S 系に対して速度 v で運動する時計は，S 系の時計に比べておそくなるであろう．

S 系と S' 系が同等であることに注意すれば，S 系中に静止している時計も全く同様に，S' 系の時計に比べておくれるのは明らかである．

さて，この結果に導いた Lorentz 変換が，§16 で論じた S および S' 系での時計の合わせ方によることを想えば，(36) で記述される動いている時計のおくれは単に見掛け上のことにすぎないと考えるかも知れない．ところが Lorentz の短縮の場合と同様，(36) 式が動いている時計のおくれに関する事実を原理的に実験によって確かめることができるという内容を含んでいる．いまある慣性系の原点に一緒におかれている2つの時計 C_1, C_2 を考える．時刻 $t=0$ において，時計 C_2 を x 軸の方向に速度 v で一様な運動を起させる．時刻 $t=t_P$ に，それが x- 軸上の点 P に到達するとすれば，(36) により，それは時刻 $t_P(1-v^2/c^2)^{1/2}$ を刻むであろう．P に到着後ただちに，C_2 は速度 $-v$ で O に送りかえされるものとする．それが O に到着するのは C_1 が時刻 $t=t_1=2t_P$ を刻むときである．(36) によれば，C_2 の進み方は v の符号によらぬから C_2 が点

Oに到達するときには時刻 $t_2=2t_P(1-v^2/c^2)^{1/2}$ を刻むはずである．C_2 が出発するときどちらも時刻0を指していた時計 C_1, C_2 は，C_2 が戻って来たときには，それぞれ時刻 t_1, t_2 を刻み，これらは

$$t_2=(1-v^2/c^2)^{1/2}t_1 \tag{37}$$

で結ばれる．この t_1 と t_2 の差は，この全過程の前後における C_1, C_2 の読みを比べることによって，原理上直接測定できるはずのものである．

Einstein が相対性理論に関する彼のはじめの論文で述べているように，理論からえられた上に述べた結果は，過去において，この理論が論理的な矛盾を含んでいないかどうかの議論で重要な役割を演じてきたのであった．すなわち，C_2 と共に動き，O と P を往復するような座標系 R を考えよう．R に対する C_1 の運動は S に対する C_2 の運動と全く同じであるから，R 中の観測者は C_1 の方が C_2 よりおそいように観測し，(37) と矛盾した結果をえるように思われる，ところが，この議論は間違っている．なぜならば (36) 式が成り立つのは慣性系の場合に限り，C_2 の速度が v から $-v$ に変わるとき，R 系は恒星系に対して加速されるから，R 系では (36) は通用しないのである．それでは R 系では (36) の代りにどんな式を用いるべきであるかという問題は一様な運動をしている系中での物理現象しか取り扱わない特殊相対論の範囲内では答えることができない問題である．この議論は，特殊相対論をさらに一般的な運動をしている場合に拡張することの必要性を示している（この時計に関する背理の最終的な解決については第 VIII 章 §98, 255 頁を見よ).

ふたたび，慣性系 S に対して一様な速度 u で運動する標準時計について考えることにしよう．動いている時計自身が刻む時刻をこの時計の固有時と呼ぶ．(36) によれば，固有時の経過 $d\tau$ と S での時間の経過 dt の間には次の関係がある．

$$d\tau=(1-u^2/c^2)^{1/2}dt. \tag{38}$$

この式は，瞬間の速度が u であるような任意の運動をしている時計についても成り立つものと仮定しよう．つまり，われわれは次のことを仮定するのである．すなわち**慣性系に対して時計を加速しても，時計の進み方には変化がなく，任意の時刻における時計の固有時の増分は静止系 S^0，すなわちその瞬間時計が静止している系 S^0，にある標準時計の固有時の増分に等しい**ということを仮定する．

運動している時計のおくれは，その時計仕掛の運動を支配する力学の基礎法則から導かれるはずのものである．しかし Lorentz 短縮の場合と同様，このおくれの現象を相対性原理からの直接の結果である基本的な現象と見なす方が

より適切である．もし，われわれが時計のはたらきを計算する基礎としてNewton の力学を用いたとすれば，Newton の基礎方程式中の時間は不変なパラメータであるから (I. 1b 参照) 動いている時計のおくれは見出されないであろうし，これがまた Newton の方程式が $(1-v^2/c^2)^{1/2}$ が 1 と非常に異なる領域では正確でないことを示すことになっているのである．これに反し，われわれが時計のはたらきを記述するのに正確な相対論的な力学を用いる場合には (第 III および VI 章参照) このおくれの現象はこれらの方程式の結果としてえられるのは，もちろんである．

任意の物理系が時計として用いられることから考えて，慣性系に対して運動している任意の物理系の推移の速さは，静止している同じ物理系の推移の速さよりもおそいはずである．例えば放射能過程を考えよう．この放射性物質の平均寿命 τ は，速度 v で運動している場合には，静止している場合の平均寿命 τ^0 よりも長くなるはずで，τ と τ^0 の関係として (36) からただちに

$$\tau=(1-v^2/c^2)^{-1/2}\tau^0 \tag{39}$$

がえられる．

一般に c に比べて v は非常に小さいので τ と τ^0 を区別する必要はない．ところが最近非常に速く動いている放射能をもった系——中間子——が宇宙線の中に発見された．この場合には $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ は 1000 又はそれ以上の値をもっている．したがって中間子の崩壊に関係する現象の説明には，(39) 式は本質的に重要になる．

また光を放射している原子を時計として用いることもできる．そして 1 秒間に放射される光波の数が，この原子時計の進みの目盛りになる．この原子の固有振動数，すなわちこの原子が静止している慣性系 S^0 内で測った光の振動数を ν^0 とすれば，単位時間に放出される波の数はこの系内ではちょうど ν^0 である．原子が速度 v で動いている系 S では，単位時間に放出される波の数は $\nu^0(1-v^2/c^2)^{1/2}$ となるであろう．というのは S 系の単位時間は S^0 系での時間間隔 $\varDelta\tau=(1-v^2/c^2)^{1/2}$ にあたるからである．さて，運動しているこの原子が，S 中の観測者に対して視線速度をもっていない場合には，この波の数は S 中の観測者が観測した振動数 ν に等しいはずである．なんとなれば単位時間に放出された波の数は単位時間に到達する波の数に等しいからである．したがって視線速度が零の時は，

$$\nu=(1-v^2/c^2)^{1/2}\nu^0 \tag{40}$$

をえる．例えば，この原子が速度 v で観測者を中心として円運動している場合，あるいは観測者に達した光の方向が原子の運動の方向に直角な場合がちょうど

これに相当する．

したがって，相対対理論によれば直角に入射した光に対しても振動数のずれ，しかも振動数の小さい方へのずれが期待される．これは非相対論的な Doppler 効果の式 (I. 14) と全く相容れない結果である．このようにスペクトル線が赤色の方にずれること，いわゆる横方向の Doppler 効果が，(39) で記述される動いている時計のおくれの直接の結果であって，この効果の実験的検証が可能であるような実験は同時にまた (36) 式の実験的証明である．これについては後にもう一度述べるはずである (§ 25, 58 頁).

21. 粒子の速度の変換

2つの慣性系 S と S' を考え (第8図)，その時空座標の関係は (24) または (24′) で与えられるとする．この場合，ある運動している粒子の運動は S 系では一連の方程式

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad z=z(t) \tag{41}$$

によって記述される．一方，同じ運動は S' 系では

$$x'=x'(t'),\qquad y'=y'(t'),\qquad z'=z'(t') \tag{41′}$$

で記述される．函数群 (41′) は Lorentz 変換 (24) によって函数群 (41) から求められる．S' 系における粒子の速度 $\boldsymbol{u}'$ は

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}'=(u'_x, u'_y, u'_z)=\left(\frac{dx'}{dt'},\ \frac{dy'}{dt'},\ \frac{dz'}{dt'}\right)\\&u'=(u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

である．同様に S 系における同じ粒子の速度 $\boldsymbol{u}$ は

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, v_z)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\\&u=(u^2_x+u^2_y+u^2_z)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

で与えられる．

特殊 Lorentz 変換 (24) を微分すれば

$$\left.\begin{aligned}&dx'=\gamma(dx-vdt),\ dy'=dy,\ dz'=dz\\&dt'=\gamma(dt-vdx/c^2)\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

がえられる．これから直ちに

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-vu_x/c^2},\quad u'_y=\frac{u_y(1-v^2/c^2)^{1/2}}{1-vu_x/c^2},\quad u'_z=\frac{u_z(1-v^2/c^2)^{1/2}}{1-vu_x/c^2} \tag{45}$$

が求められる．この速度の変換公式は $c\to\infty$ の極限では通常の変換公式 (I. 4) に一致する．(45) 式の $'$ を附した変数と附さない変数とを変換し，v の代り

に $-v$ を用いれば，(45) の逆変換式がえられる．

いま，z 軸を $\boldsymbol{u}$ (したがって $\boldsymbol{u}'$) に直交するようにとれば，(45) は

$$u'\cos\vartheta'=\frac{u\cos\vartheta-v}{1-uv\cos\vartheta/c^2},\quad u'\sin\vartheta'=\frac{u\sin\vartheta(1-v^2/c^2)^{1/2}}{1-uv\cos\vartheta/c^2}$$

となる．ここに ϑ は x 軸とベクトル $\boldsymbol{u}$ となす角，ϑ' は $\boldsymbol{x}$ 軸とベクトル $\boldsymbol{u}'$ となす角である．

上の関係式から直ちに次の式が求められる

$$\tan\vartheta'=\frac{\sin\vartheta(1-v^2/c^2)^{1/2}}{\cos\vartheta-v/u}, \tag{46}$$

$$u'=u\frac{\{1-2v\cos\vartheta/u+v^2/u^2-v^2\sin^2\vartheta/c^2\}^{1/2}}{1-uv\cos\vartheta/c^2}. \tag{47}$$

これらの関係式は，関係式 (I. 5) と (I. 6) を相対論的に拡張したものである．初等的な計算によって (47) から次の公式が導かれる．

$$(1-vu_x/c^2)(1-u'^2/c^2)^{1/2}=(1-u^2/c^2)^{1/2}(1-v^2/c^2)^{1/2}. \tag{48}$$

さて $\boldsymbol{u}$，したがって $\boldsymbol{u}'$ が x 軸に平行な場合には，(45) より速度に関する相対論的な加法定理

$$u'=\frac{u-v}{1-uv/c^2},\quad u=\frac{u'+v}{1+vu'/c^2} \tag{49}$$

をえる．$u'=c$ の場合には，この加法定理から $u=c$ となる．

Lorentz 変換式 (24), Lorentz 短縮および時計の遅れに関する式は $v>c$ とすれば虚になるから，Lorentz 変換式から直接 $v>c$ なる速さ v で S 系に対して運動する慣性系 S' が存在しえないことがわかる．さらにこれに加えて次に述べるようにもし粒子（一般的には信号）が任意の慣性系に対して c より速い速度で走るとすると不合理な結果を生み出すから，c 以上の速度を持ちえないことが明らかになる．いま，かりに光速度 c より大きい速度の信号を出すことができたとする．そうすれば，第8図において2つの座標系 S と S' が一致した瞬間，$t=t'=0$ に共通の原点 O, O′ から x' 軸の負の方向に S' に対して c より大きい速度 u' で信号を送ることができる．時刻 $t_1'>0$ で，この信号は x' 軸上座標 $x_p'=-u't_1'$ の点 P に到達する．S 系で見たこの事象の時空座標は (24′) より

$$\left.\begin{aligned}x_p&=\gamma(x_p'+vt_1')=-\gamma t_1'(u'-v)<0\\ t_1&=\gamma(t_1'+vx_p'/c^2)=\gamma t_1'(1-vu'/c^2)\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

信号が P についた瞬間，信号を S 系に対する速度 $w(w>c)$ で原点 O に送り

帰す．この信号の運動は

$$x=w(t-t_1)+x_p \tag{51}$$

で表わされる．この式で $x=0$ とおいた時刻 $t=t_2$ に信号は S の原点Oに到達する．t_2 は

$$t_2=t_1-x_p/w=\gamma t_1'\{1-u'v/c^2+(u'-v)/w\}. \tag{52}$$

ここで，

$$u'>\frac{c^2}{v},\quad w>\frac{u'-v}{u'v/c^2-1} \tag{53}$$

を満足するように u' と w をとれば，

$$t_2<0 \tag{54}$$

となる．これはOにある同じ時計を用いながら，信号がOに戻った時刻がOを出発した時刻よりも早いことになって不可能事に属する．すなわち自然界では慣性系に対して光速度以上の速度で走る信号は存在しえないことが示された．この結論は，自然の基礎法則に関する一般的な表現である．後に述べるように(第 III 章, § 29, 72 頁)，相対性論的力学においては，質点は c より大きい速度に到達することはできないということの1つの場合である．

(25) と (25′) とを微分すれば，回転を伴わない Lorentz 変換の速度に関する変換式がえられる．

$$\boldsymbol{u}'=\frac{(1-v^2/c^2)^{1/2}\boldsymbol{u}+\{[1-\sqrt{(1-v^2/c^2)}](\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})/v^2-1\}\boldsymbol{v}}{1-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})/c^2}, \tag{55}$$

$$\boldsymbol{u}=\frac{(1-v^2/c^2)^{1/2}\boldsymbol{u}'+\{[1-\sqrt{(1-v^2/c^2)}](\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v})/v^2+1\}\boldsymbol{v}}{1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}')/c^2}. \tag{55'}$$

$c\to\infty$ にすれば上式は (I. 3) に一致する．(55) より (48) と同じ関係式

$$(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}/c^2)(1-u'^2c^2)^{1/2}=(1-v^2/c)^{1/2}(1-u^2/c^2) \tag{56}$$

を導くことができる．

$\boldsymbol{u}'$ が $\boldsymbol{v}$ に直交する場合，すなわち $\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}=0$ の場合は (55′) は

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+(1-v^2/c^1)^{1/2}\boldsymbol{u}' \tag{57}$$

となり，$\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}$ に平行な場合は (49) に一致する．

22. 逐次 Lorentz 変換．Thomas 歳差

S, S' および S'' なる3つの慣性系を考えよう．ただし，S' は S に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で運動し，S'' は S' に対して速度 $\boldsymbol{u}'$ で運動しているものとする．このとき S 系での座標 (x,t) と S' 系での座標 (x',t') の間の関係は (一般には非斉次) Lorentz 変換で与えられる．同様にして，(x',t') と S'' 系での座標 (x'',t'') の

間の関係も 1 つの Lorentz 変換で表わされる．これら 8 つの方程式の間で，4 つの変数 (x', t') を消去すれば (x, t) と (x'', t'') の間の関係がえられ，物理的に云ってこの関係も一つの変換でなければならない．このことを数学的に云えば，Lorentz 変換は**群**をなすということで云い表わされる．時刻 $t=t'=0$ で S と S' の原点が一致し，時刻 $t'=t''=0$ で S' と S'' についても同じであるならば，時刻 $t=t''=0$ で S および S'' の原点も当然一致する．このことは**斉次 Lorentz 変換**がその部分群をなすことを意味する．また比べる準拠系を変えず，その直交座標軸のみを空間的に回転する回転も，また明らかにその部分群になっている．

非相対論的運動学でも直交軸の回転を伴わない Galilei 変換は部分群をつくる．しかし相対論的運動学の場合には，このことは成り立たない．というのは，たとえ回転を伴わない 2 つの Lorentz 変換を組み合わせても，合成された Lorentz 変換は一般に直交軸の向きの変化を伴うからである．S から S' への Lorentz 変換が (25) 式で与えられるものとしよう．すると S' から S'' への変換は (25) 式で $(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{v})$ を $(\boldsymbol{x}', t', \boldsymbol{u}')$，$(\boldsymbol{x}', t')$ を $(\boldsymbol{x}'', t'')$ でおきかえたもので与えられる．$\boldsymbol{x}'$，t' を消去すれば (28b) のような型の Lorentz 変換

$$\boldsymbol{x}'=\mathfrak{D}^{-1}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{w}''\left\{\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}}{w^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(1-w^2/c^2)}}-1\right]-\frac{t}{\sqrt{(1-w^2/c^2)}}\right\} \tag{58}$$

がえられる．ここで演算子 $\mathfrak{D}$ は一般に単位演算子とは異なる．$\boldsymbol{w}$ は S に対する S'' の速度，$\boldsymbol{w}''$ は S'' に対する S の速度である．S から S' への変換および S' から S'' への変換が廻転を伴わぬ Lorentz 変換であるから，S'' に対する S' の速度は $-\boldsymbol{u}'$ に等しく，S' に対する S の速度は $-\boldsymbol{v}$ に等しい．また S に対する S'' の速度 $\boldsymbol{w}$ は (55′) で u を w とおいた式

$$\boldsymbol{w}=\frac{(1-v^2/c^2)^{1/2}\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}\{((\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}/c^2)([1-(1-v^2/c^2)^{1/2}]+1\}}{1+(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v})/c^2} \tag{59}$$

としてえられる．同じく，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}'$ をそれぞれ $-\boldsymbol{u}'$ と $-\boldsymbol{v}$ でおきかえることにより，S'' に対する S の速度 $\boldsymbol{w}''$

$$\boldsymbol{w}''=-\frac{(1-u'^2/c^2)^{1/2}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}'\{((\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}/u'^2)[1-u'^2/c^2)^{1/2}]+1\}}{1+(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v})/c^2} \tag{59′}$$

がえられる．(29) はこの場合

$$\mathfrak{D}\boldsymbol{w}''=-\boldsymbol{w} \tag{60}$$

であるが，(59) と (59′) を比べてみればわかるように，この場合廻転の演算子 $\mathfrak{D}$ は一般に単位演算子に等しくない．$\boldsymbol{u}'$ が $\boldsymbol{v}$ に平行な場合，例えば $k\boldsymbol{v}$ である場合に限り (59) と (59′) から

$$\boldsymbol{w}''=-\boldsymbol{w}=-\frac{1+k}{1+kv^2/c^2}\boldsymbol{v},$$

すなわち $\mathfrak{D}=1$ となって合成された Lorentz 変換は回転を伴わない.

さて S' から S'' への変換が無限小変換の場合，すなわち u' が無限小の場合を考えよう. $\boldsymbol{u}'$ に関する 1 次以上の項をみな無視してしまえば， S' から S'' に移る変換は簡単に，

$$\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{u}'t',\quad t''=t'-(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{x}')/c^2 \tag{61}$$

となり， $\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{w}''$ については (59), (59′) から

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{w}&=\boldsymbol{v}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left\{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}')}{v^2}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}-1\right]\right\},\\
\boldsymbol{w}''&=-\left(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}')}{c^2}\right),\\
w^2&=w''^2=v^2+2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}')\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

となる.

x', t' に関する式 (25) を (61) に代入すれば，単純ではあるが長い計算の結果，(58) と同じ形で，そこの $\mathfrak{D}^{-1}\boldsymbol{x}$ および $d\boldsymbol{v}$ としては次のもの

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{-1}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{x}+\frac{1}{v^2}\{(1-v^2/c^2)^{-1/2}-1\}\{(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{x}\}\\
d\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

であるような式をえる. すなわち

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\\
\boldsymbol{\Omega}&=-\frac{1}{v^2}\{(1-v^2/c^2)^{-1/2}-1\}\quad(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{v})
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

をえる. したがって回転演算子 $\mathfrak{D}$ はベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の方向のまわりの無限小回転を表わし，その回転角はベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の絶対値 $|\boldsymbol{\Omega}|$ に等しい.

(64) で与えられた $\mathfrak{D}$ および $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}''$ がここで考えている近似の範囲内で (60) なる関係を満足していることを確めるのは容易である.

さて，ここで，われわれは点状のコマを考えよう. すなわち，なんらかの方法で一つの方向を定義することのできる質点を考えるのである. スピンを有する古典電子はこのような点状のコマと考えることができよう. S に対するこの粒子の速度を $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$, とし $d\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{v}}(t)dt$ を (64) に代入すれば，上の考察における S', S'' 系というのは，それぞれ時刻 t，および $t+dt$ において，その粒子が瞬間的に静止している慣性系と考えることができる. S から S'' への変換

は回転を伴わぬ無限小 Lorentz 変換であるから，粒子に作用する力がそのコマにトルクを及ぼすようなものでない限り，時刻 $t+dt$ においてそのコマの方向が S'' 系中の軸に対して示す方向は，時刻 t において S' 系内の軸に対して示した方向と同じであると見なすのが自然である．

さて，$d\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{v}}dt$ とおけば，(64) で定義された廻転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は，時刻 $t+dt$ においてSの座標軸に対して，これが S'' で有すると同じ向きにするために行うべき回転を表わす．さらに静止系に対するコマの方向は一定であるから，このことは，Sに対するコマの方向が回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ に対応する角だけ回転することを意味する．換言すれば，このコマはS系に対して，角速度

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{v^2}\{(1-v^2/c^2)^{-1/2}-1\}(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}) \tag{65}$$

で歳差運動を行う．ただし $\dot{\boldsymbol{v}}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ は，この点状のコマの加速度を表わす．$v\ll c$ のときは第1近似として

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}}{2c^2} \tag{66}$$

をえる．この歳差の現象は Thomas† によってはじめて研究されたので Thomas の歳差と呼ばれている．

23. 相対論における波を特徴づける諸量の変換

波動法線 $\boldsymbol{n}$ が座標系Sの xy 面上にあり，またS系での振動数が ν，速度が w の平面波に着目する．このような波は

$$\Psi=A\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{w}\right) \tag{67}$$

の形をした数個の波動函数で表わされる．ただし α は波動法線 $\boldsymbol{n}$ が x 軸となす角である．座標系Sに対してその x 軸の方向に速度 v で動いている座標系 S' では同じ平面波を表わす式は（第1図参照），(67) 中の位相の部分内に現われている量を S' 系で測ったそれぞれに対応する量で置きかえたものである．§3 で論議したときと全く同じ理由から位相は不変量でなければならぬ．すなわち

$$\nu\left(t-\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{w}\right)=\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{w'}\right) \tag{68}$$

は空間内のすべての点で，またあらゆる時刻において常に成立していなければならぬ．Lorentz 変換式 (I. 24′) を用いて，(68) より x, y, t を消去すれば

† L. W. Thomas, *Phil. Mag.* (7), **3**, 1 (1927)

$$\frac{1-v\cos\alpha/w}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\nu t'-\frac{\cos\alpha-vw/c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\frac{\nu x'}{w}-\frac{\nu\sin\alpha}{w}y'$$
$$=\nu' t'-\frac{\nu'\cos\alpha'}{w'}x'-\frac{\nu'\sin\alpha'}{w}y' \tag{69}$$

がえられる．この (69) は独立変数 t', x', y' のあらゆる値に対して成立しなければならぬ．これは (69) 式の t', x', y' の係数の左右両辺の値がそれぞれ等しいときにのみ成立する．すなわち

$$\left.\begin{aligned}\nu'&=\nu\frac{1-v\cos\alpha/w}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}=\nu\frac{1-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})/w}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\\ \frac{\nu'\sin\alpha'}{w'}&=\frac{\nu\sin\alpha}{w}\\ \frac{\nu'\cos\alpha'}{w'}&=\frac{\nu(\cos\alpha-vw/c^2)}{w(1-v^2/c^2)^{1/2}}\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

が成立の条件である．

(70) より $\tan\alpha'$ と w' を求めれば，

$$\tan\alpha'=\frac{\sin\alpha(1-v^2/c^2)^{1/2}}{\cos\alpha-vw/c^2}, \tag{71}$$

$$w'=\frac{w-v\cos\alpha}{\sqrt{\left(1-\dfrac{2vw\cos\alpha}{c^2}+\dfrac{v^2w^2}{c^4}-\dfrac{v^2\sin^2\alpha}{c^2}\right)}} \tag{72}$$

上式で $'$ を附した量と附さない量を交換し，v の代りに $-v$ を用いれば，逆の関係式がえられることは従前と同じである．$c\to\infty$ の極限では (70), (71) および (72) 式は非相対論的に取り扱った公式 (I. 14), (I. 16) および (I. 19) に一致する．

質点の運動方向および速度の変換式 (46) と (47) を，公式 (71) と (72) に比較すれば，u, u' を $u=c^2/w$, $u'=c^2/w'$ とおいたとき (46) が (71) に，(47) が (72) になる．換言すれば，粒子の速度 $\boldsymbol{u}$ と運動方向 $\boldsymbol{n}$ は，位相速度 $w=c^2/u$ と進行方向 $\boldsymbol{n}$ の波動についてのそれぞれの量と同じ変換規則で変換する．de Broglie† は，その素粒子の波動論において，この事情を用いて，速度 u, 運動方向 $\boldsymbol{n}$ の粒子に，進行方向 $\boldsymbol{n}$, 位相速度 $w=c^2/u$ の平面波を所属させた．この方法は明らかに相対論的に不変である．粒子の速度 u が c に等しければ，これに対応する波動の速度 w も c に等しくなる．このようにこの粒子の運動方向と速度とは，真空中の光の平面波の進行方向と速度と全く同じように変換する．ただしこれは c という特別の速度で走る粒子についてであるこ

† L. de Broglie, Thèse, Paris 1924

とを注意する．

24. 運動物体中における光線速度

座標系 S' (第8図) に対して静止している屈折率 n なる均質等方の媒質を考えよう．この媒質は S 系に対して速度 v で運動しているものとする．静止系 S' 中では，誘電体中における Maxwell の電磁力学の現象論的方程式が成立する．したがって，相対性原理によれば S' 系の速度が一定である限り，それが恒星系に対してどんな値であろうとも，この式は成立しなければならない．それであるから，S' 系に対する光の位相速度はすべての方向に対して $w'=\dfrac{c}{n}$ である．しかも，この系では光線速度は位相速度に等しくなければならない，というのは Huyghens の原理によって光線速度を定める素元波も一定速度

$$w'=c/n \tag{73}$$

を有する球面波だからである．

ところが座標系 S においてはこのことは成り立たない．例えば時刻 $t=t'=0$ において S および S' 系の共通の原点 O, O′ から放射された素元波の伝播について考えよう．S' 系中におけるこの波の拡り方は，

$$x'^2+y'^2+z'^2-w'^2t'^2=0 \tag{74}$$

で記述される．ただし w' は (73) で与えられる．Lorentz 変換 (24) により，(74) 式から S 系における素元波の伝播の式

$$\left.\begin{aligned}&(x-at)^2/b+y^2+z^2-bw'^2t^2=0\\&a=v\frac{1-w'^2/c^2}{1-v^2w'^2/c^4},\quad b=\frac{1-v^2/c^2}{1-v^2w'^2/c^4}\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

がえられる．したがって時刻 t に点 (x_0, y_0) から S 系の xy 面内に放射された素元波が，時刻 $t+\Delta t$ において xy 面と交わる交線は

$$f(x, y;\ x_0, y_0)\equiv(x-x_0-a\Delta t)^2/b+(y-y_0)^2-bw'^2\Delta t^2=0 \tag{76}$$

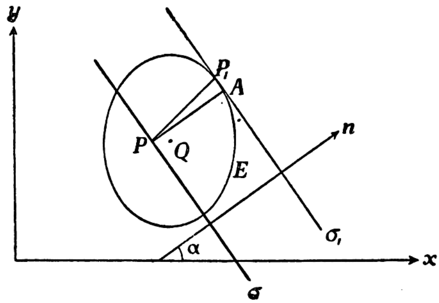
で与えられる．われわれはここで $n>1$，すなわち $w'<c$ なる場合のみを取り扱うことにしよう．このときは $c>a>0$, $1>b>0$ であるから，この交線は，点 $(x_0+a\Delta t, y_0)$ を中心とし，$bw'\Delta t$ および $b^{1/2}w'\Delta t$ を半長軸と半短軸とする楕円である．したがって素元波は速度 a で媒質に引きずられる．そして同時にこの波は運動の方向に $b^{1/2}$ の割で収縮する．

ふたたび平面波の場合を考えることにしよう．法線 $\boldsymbol{n}$ が xy 面内にあり，x- 軸と角 α をなすような平面を考えよう．その際 α と S' 系における法線の方向との関係は，(71) またはその逆の式

$$\tan\alpha=\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\sin\alpha'}{\cos\alpha'+vw'/c^2} \tag{77}$$

で与えられる．第9図で σ はS系で xy 面との交線が

$$x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha=C=\text{constant} \tag{78}$$



第 9 図

で与えられるような波面を表わす．楕円Eは時刻 t に点 P：(x_0, y_0) から放射された素元波の，時刻 $t+\Delta t$ における位置を表わし，その中心は Q：$(x_0+a\Delta t, y_0)$ にある．この楕円は方程式 (76) で与えられる．σ_1 は時刻 $t+\Delta t$ における波面を表わし，(x_0, y_0) が (78) を満足するように変動させることによってえられる楕円群の包絡線が σ_1 になっている．

こうして光線速度の方向と大きさは，線分 $\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}$ で与えられる．ここで $\mathrm{P_1}$ はその座標が (x_1, y_1) で，この楕円が包絡線と接する点である．光速度を $\boldsymbol{u}$ とすれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}=\boldsymbol{u}dt \tag{79}$$

なることは明らかである．$\mathrm{P_1}$ は曲線群 (76) の相隣る2つの楕円の交点の極限の点であるから，$\mathrm{P_1}$ の座標は (76) を満足するだけでなく，(76) 式中の x_0, y_0 を (78) を満足するように変動したときにえられる方程式をも満足せねばならない．すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\sin\alpha-\frac{\partial f}{\partial y_0}\cos\alpha=0.$$

または，

$$(x-x_0-a\Delta t)\sin\alpha=b(y-y_0)\cos\alpha \tag{80}$$

を満足せねばならぬ．

(76), (78) および (80) 式から，x_0, y_0 を消去することにより，包絡線 σ_1 の方程式として

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=C+[a+w'\{b(b+\tan^2\alpha)\}^{1/2}]\cos\alpha\Delta t \tag{81}$$

が求められる．(81) 式の最後の項は2つの波面間の距離 PA を与え，これは $w\Delta t$ に等しくなければならない．ただし w は位相速度である．したがって

$$w=\{a+w'[b(b+\tan^2\alpha)]^{1/2}\}\cos\alpha \tag{82}$$

をえる．a, b および α に (75), (77) を代入すれば，(82) は (72) 式の逆の関係式に一致することを容易に検証することができる．

(79) によれば

$$u_x=\frac{x_1-x_0}{\Delta t},\quad u_y=\frac{y_1-y_0}{\Delta t} \tag{83}$$

であり，$x=x_1$, $y=y_1$ は (76), (80) の解であるから，簡単な計算の結果

$$u_x=a+\frac{b^{3/2}w}{(b+\tan^2\alpha)^{1/2}},\quad u_y=\frac{b^{1/2}\tan\alpha w'}{(b+\tan^2\alpha)^{1/2}} \tag{84}$$

がえられる．a, b, α に (75), および (77) を代入し，光線速度 $\boldsymbol{u}'$ が S' 系での位相速度 $\boldsymbol{w}'$ に等しいことを思い出せば，(84) は

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+u'_xv/c^2},\quad u_y=\frac{(1-v^2/c^2)u'_y}{1+u'_xv/c^2} \tag{85}$$

となることがわかる．この (85) 式は (45) の逆の関係に等しく，これは光線速度が（絶対エーテルの理論の場合と同様，(I. 33) 参照）1 つの質点の速度と同様な変換をうけることを示している．ϑ および $\vartheta'=\alpha'$ をそれぞれ光線の方向が x 軸となす角を S 系および S' 系で測った値とすれば，この光線速度に対しても (46) および (47) という $u, u', \vartheta, \vartheta'$ の間の関係がえられる．(47) を u についてとけば

$$u=\frac{u'\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left\{1-\frac{v^2}{u'^2}+\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})^2}{u'^2}\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)\right\}^{1/2}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})^2}{c^2}\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)} \tag{86}$$

をえる．ただし，

$$u'=c/n. \tag{87}$$

$\boldsymbol{e}$ は光線方向の単位ベクトルで

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}=v\cos\vartheta. \tag{88}$$

真空中，すなわち $n=1$, $u'=w'=c$, の場合には，u, w は c に等しく，光線速度の式 (46), (47) は位相速度の式 (71), (72) に一致する．相対性理論によれば，真空中での光線速度は，このように，**任意の**慣性系でその位相速度に等しい．絶対エーテルの理論では，このことが成り立つのは絶対系のみに限られていた．このちがいのよって起る原因は，相対性理論の場合，真空中で素元波が，任意の慣性系で一定点を中心とする球面波であることにあるのである（何となれば，$w'=c$ であるから，(75) から $a=0, b=1$ となる）．後に見るように（V,

VII 章) 光線速度は，電磁エネルギーが電磁波という形で流れる速度である．ところがエネルギーの流れの密度は Poynting ベクトルで与えられ，真空中では，どの慣性系でもこの Poynting ベクトルは波動法線の方向と一致するのである．

光線速度と位相速度がこのように一致するのは真空の場合に限るのである．屈折性の媒質中では，一般にはこの 2 つの速度は区別しなければならない．ただし光線が媒質の運動の方向に平行な場合に限り，光線速度も位相速度も (85) または (86) と (76) により，

$$u = w = \frac{c/n \pm v}{1 \pm v/cn} \tag{89}$$

で与えられる．ここでプラス，またはマイナスの符号は光が媒質と同じ向きに進んでいるか，反対向に進んでいるかに従って選ばねばならぬ．

25. 相対性理論における Doppler 効果・光行差・随伴現像

(70) 式において慣性系 S を観測者の静止座標系，慣性系 S' を光源の静止座標系にとった場合が，Doppler 効果の相対論的な公式にほかならない．ここで振動数 ν は観測者が測った振動数であり，ν' が光源の固有振動数に等しくなる．また真空中では $w=c$ となり，光線の進行方向は波動法線の方向に一致する．こうして

$$\nu^0 = \nu \frac{1-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})/c}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \tag{90}$$

という関係がえられる．この式で $\boldsymbol{v}$ は光源の観測者に対する速度であり，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{n}$ は観測系 S における光の進行方向を示す単位ベクトルである．観測された光の方向が光源の運動方向に垂直の場合には $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})=0$ であるから，(90) 式は横の Doppler 効果 $\nu=\nu^\circ(1-v^2/c^2)^{1/2}$ を与える．この結果は §20 で述べたように，運動している時計の遅れの現象を直接現わしている．また Ives† は高速度で運動しているイオンから発する光の振動数を測定して公式 (90) が正しいことを実験的に確かめた．これについてはすでに §5でふれた．

公式 (46) はある光線の 2 つの慣性系 S, S' における方向の間の関係を表わす式であるが，S を恒星静止系，S' を地球静止系にとれば，この公式がそのまま相対論的な光行差の公式になる．地球の大気圏の外の点 P′ では $u=c$ となり，また地球の運動方向と星の真の方向および見かけの方向との間の角をそれぞれ θ, θ' とすると $\theta=\vartheta-\pi$, $\theta'=\vartheta'-\pi$ となるから，(46) 式より相対論的

† 9 頁の文献参照

な光行差の公式として次式がえられる.

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta(1-v^2/c^2)^{1/2}}{\cos\theta + v/c}. \tag{91}$$

この結果とエーテル理論から導かれた結果 (I. 61) 式との差は第 2 近似で始めて現われ, これは現在の測定の精度では無視できるものである.

地球の大気は S' 系に対して静止しているので, 相対性の原理から光線は点 P' から望遠鏡まで達する間ではこれ以上光行差を受けないことになる. 相対性理論においてこのことは正確に成立するが, Lorentz の絶対空間を認めた電子論ではこのことは第 1 近似においてのみ成立している (§10 を参照). またここで位相速度の方向にも光行差が現われるが, これも相対論的な取り扱いが旧理論と本質的な差を持つことの現われである. すなわち従来の絶対空間を認めた理論では, 波動法線の方向は (I. 28) 式より S 系でも S' 系でも同じであるが, 相対性理論では**真空中**の波動法線の方向の変換は (71) 式で与えられ, これは光線の方向の変換式 (46) と同じである.

任意の慣性系 S に対して一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している媒質中の光線の速度 $\boldsymbol{u}$ は (86) 式で与えられるが, ここで v の 2 乗以上の高次の項をすべて省略すれば $\boldsymbol{u}$ は次のような簡単な式で与えられる.

$$u = u' + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}(1-u'^2/c^2) = c/n + \alpha(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}). \tag{92}$$

ただし $\alpha = 1-1/n^2$ は Fresnel の随伴係数である. この近似式 (92) は"絶対空間"に固定した座標系における光速度を表わす Fresnel の式 (I. 48) に一致する. このように Fresnel の式は媒質の原子構造に関して何の仮説を設けなくても導かれる, 相対性原理の直接的な結果であることになった. ただ, ここで Fresnel の理論は '絶対空間' 内でのみ, しかも第 1 近似の範囲で正しいということを強調する必要がある. 他の系においては, Fresnel の式はたとえ第 1 近似としてももはや正しくはない. たとえば, 媒質の静止座標系における光線の速度 u' は相対性理論によれば $u'=c/n$ であるが, これに反して Fresnel の理論によれば u' はこれよりも複雑な公式 (I. 46) で与えられることになる.

(92) 式は §8 で説明した Fizeau の実験で検証されているが, Zeeman はさらに高い精度の実験でこれを検証した†. Zeeman の実験では非常に速く運動している水晶の棒の中の光速度を測るのであるが, その測定がきわめて正確なので Lorentz の電子論から期待される分散媒質内中に起る効果を無視できない (§9 参照). 分散媒質では屈折率 n は ν の函数であり, ν は Doppler 効

† P. Zeeman, *Amst. Versl.* **23**, 245 (1914); **24**, 18 (1915)

果のために座標系に依存するので，ν したがって n としていかなる値を (92) 式中に用いるべきかを定めなければならない．上述の (86) および (92) 式を導いた過程をふり返ると，(92) 式の n としては媒質の静止座標系で測られる振動数 ν' に対応する n を用いなければならないことになる．(70) 式中で v に関して第2次以上の高次項を全部省略すれば，ν' と ν の間の関係式として

$$\nu'-\nu=-\nu n(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})/c \tag{93}$$

がえられる．また光線の方向と波動法線の方向との差は v に関して2次の項で与えられる．したがって

$$\frac{c}{n(\nu')}=\frac{c}{n(\nu)}+\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\nu}\,\frac{n\nu(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})}{c}$$

という関係式がえられる．ここに $n(\nu)$ は振動数が ν のときの n 値を意味する．この式を (92) 式に代入すれば，

$$u=\frac{c}{n}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{\nu}{n}\,\frac{dn}{d\nu}\right). \tag{94}$$

この公式は Zeeman の測定結果と完全に一致した．

運動している鏡による光の反射および運動している2つの媒質の境界面における光の屈折を相対性理論によって取り扱う場合も上と同じようにすればよい．いま鏡や媒質が静止している慣性系 S' においては，鏡面ではふつうの反射の法則が，媒質の境界面ではよく知られている屈折の法則が成立する．S 系において成立すべき法則は，光線の速度に関する変換式 (46) と (47) を適用すれば直ちに求められる．運動している鏡の反射に関する実験は Sagnac† その他の人々によって行なわれ，結果は理論とよく一致した．

鏡や媒質の運動のさいの速度が光速度にくらべて小さく (86) 式での v の2次の項は実験の精度にくらべて省略される．したがって以上述べた実験ではすべて第1次の項による効果のみが測定にかかっている．以上のことを考えると，装置全体が光を屈折する媒質でみたされたもっと一般化した場合に Michelson の実験を考察することが有益になる．この場合に装置を回転させて干渉縞の移動が起らないことは相対性原理から明らかである (24 頁の 6 図を参照せよ)．一方この結果は装置が静止している慣性系 S' で光線が PS_1P を走る時間 t_1' と PS_2P' を走る時間 t_2' を計算してもわかる．すなわち S' 系ではどの方向に対しても光速度は一定で c/n に等しいから $t_1'=t_2'$ となる．

さて鏡の運動による効果を装置がそれに対して速度 v で運動している座標系 S 上の観測者の立場にたって取り扱っても干渉縞の移動がないという結果が

---

† G. Sagnac, *C. R.* 157, 708, 1410 (1913); *Journ. de Phys.* (5), 4, 177 (1914)

えられなければならぬことも当然要請さるべきことである．S系の時計で測った光線が，PS_1P および PS_2P を走る時間を t_1 および t_2 とすると，t_1, t_2 は公式 (86) を用いて求めることができ，その結果から $t_1=t_2$ であることがわかる．それを次に示そう．光線 2 がPを出て S_2 に達する時間は明らかに $\frac{1}{2}t_2$ である．この間に装置はS系内で $\frac{1}{2}vt_2$ の距離を移動し，光線は $\frac{1}{2}ut_2$ だけ走る．ただし光速度uは (86) 式または (47) 式で与えられ速さである．時間 $\frac{1}{2}t_2$ 後の P および S_2 の占める位置を P^*, S_2^* で表わせば，第 10 図に示すように $\frac{1}{2}ut^2$, $\frac{1}{2}ut_2$ は PP*, PS₂* で表わされる．同じ図からわかるように光線と $\boldsymbol{v}$ の方向の間の角 ϑ は

$$\cos\vartheta=v/u$$

で与えられる．これを (47) 式に代入し，u^2 に関して解けば，

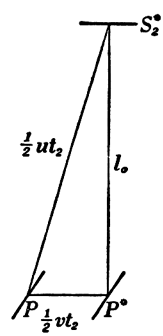
$$u^2=u'^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+v^2. \tag{95}$$

さらに三角形 $PP^*S_2^*$ にピタゴラスの定理を適用し，板 P と鏡 S_2 との距離を l_0 とすれば第 10 図から，

$$\frac{1}{2}t_2=\frac{l_0}{(u^2-v^2)^{1/2}}. \tag{96}$$

光線 2 が P から S_2 に達しふたたび P にもどるまでの時間 t_2 を (95), (96) 両式より計算すれば，

$$t_2=\frac{2l_0}{u'(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \tag{97}$$



第 10 図

次に光線 1 がPから S_1 に達してふたたびPにもどるまでの時間 t_1 の計算を行なうにあたっては，光線 1 はつねに装置の運動方向と平行に進むことからその速度uとしては (89) 式を用いればよい．光線 1 がPから S_1 に達する時間を t_1^+ で表わせば，この間に鏡 S_1 は距離 vt_1^+ だけ動き，光線 1 がSに対して運動した全距離は $l+vt_1^+$ である．ここに

$$l=l_0(1-v^2/c^2)^{1/2} \tag{98}$$

はS 系で測ったPと S_1 間の距離である．したがって次の関係式が成立する．

$$\frac{c/n+v}{1+v/cn}t_1^+=l+vt_1^+,$$

すなわち

$$t_1^+=\frac{l_0n(1+v/cn)}{c(1-v^2/c^2)^{1/2}},\tag{99}$$

光線1が S_1 から P までもどるに要する時間 t_1^- は (99) 式で v の代りに $-v$ をおきかえるだけでよい．すなわち

$$t_1^-=\frac{l_0n(1-v/cn)}{c(1-v^2/c^2)^{1/2}}.$$

結局，往復の時間 t_1 は

$$t_1=t_1^++t_2^-=\frac{2l_0n}{c(1-v^2/c^2)^{1/2}}\tag{100}$$

となり，要求通り t_1 は t_2 に等しくなる．

上述の結果は単に相対性理論が内部に矛盾を含まないことを示すだけであるといえば，いえないこともないが，仮りにそうだとしても，この結果から，その差が v の2次以上の項で生ずる，Fresnel の公式 (I. 47) と相対論的関係式 (86) のどちらを選択すべきかということはきまる．というのは (86) 式の代りに (I. 47) を用いて上述の計算を行なうと，t_1, t_2 として

$$t_1=\frac{2nl}{c(1-v^2/c^2n^2)},\quad t_2=\frac{2nl_0}{c(1-v^2/c^2n^2)^{1/2}},\tag{101}$$

がえられる．この場合にはたとえ距離 PS_1 が Lorentz 短縮の公式 (98) にしたがって短縮したとしても $n\neq1$ である限り $t_2\neq t_1$ となる．

通例の Michelson の実験が否定的な結果を得たことが Lorentz の公式 (98) の実験的な検証と見なせると同じ推論の方法で，強い屈折作用をもつ媒質中に装置を入れて行なう同じ実験が否定的な結果をえるならば，それは相対論的な公式 (86) が v の高次の項まで考慮しても正しいことを検証するものとしてよい．§8 で論じた Hoek の実験についても同様な考察が許される．

以上を総括すれば，相対論的運動学は，あらゆる細部にわたって実験結果と一致しているといってよいことになる．すなわち相対論的運動学はほかに何ら特別の仮定をいれなくてもあらゆる随伴現象を簡単に説明でき，また Doppler 効果についてはエーテル理論とはちがって，実験によく一致する式を与えるのである．

第 III 章

相 対 論 的 力 学

26. 粒子の運動量および質量

§18 の終りで述べたように，相対性原理と調和させるためには Newton の力学の基礎方程式に変更を加えることが必要になる．しかしすべての速度が c に比べて小さいような領域では，相対論的な力学は Newton の力学に移っていくようなものであろう．したがって，質点の運動量とか，質量とかいうような，Newton 力学の基本的な概念は，相対論的な力学においてもやはり意味をもっものと考えるのは極めて自然なことである．

そこである慣性系 S に対して速度 $\boldsymbol{u}$ で運動している質点に対して $\boldsymbol{u}$ に比例する運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{u} \tag{1}$$

によって附与することにする．この比例係数 m をこの質点の質量と呼ぶ．力学に上に述べた一般化の余地を作るため，最初から m を定数と考えずに，m は，速度ベクトルの大きさ $u=|\boldsymbol{u}|$ の普遍的な函数 $f(u)$ であると仮定することにして，

$$m=m(u)=f(u) \tag{2}$$

と書く．他の慣性系 S' に対するこの粒子の速度を $\boldsymbol{u}'$ とすれば，S' に対するこの粒子の運動量や質量は，

$$\boldsymbol{p}=m'\boldsymbol{u}' \tag{3}$$

で与えられなければならない．ここで

$$m'=m'(u')=f(u') \tag{4}$$

は，m が u の函数であるのと同じ函数型の u' の函数である．このことは，すべての慣性系は，同等に取り扱わるべきであり，したがって，**物理量の間に成立する関係はすべて不変な函数型で与えられなければならない**という相対性原理によるものである．

さて，この函数 f を決定するのがわれわれの当面の仕事である．これから示すように，運動量保存の定理があらゆる慣性系で成り立つべきであることを要求すれば，この函数を一意的に決定することができる†．S および S' を，相対

† G. N. Lewis and R. C. Tolman, *Phil. Mag.* 18, 510 (1909)

速度が $\boldsymbol{v}$ であるような2つの慣性系であるとし，S系ではじめ速度 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ であった2つの全く同等な粒子 1, 2 の間の衝突を考えることにしよう．対応する S' 系に対する速度は，(II. 55) によって求まる．衝突前の速度を

$$\boldsymbol{u}_2' = -\boldsymbol{u}_1 \tag{5}$$

であるように選ぶことにする．そうすると (II. 55) から直ちに，

$$\boldsymbol{u}_1' = -\boldsymbol{u}_2 \tag{6}$$

がえられる．衝突後，この2つの粒子はS系に対しては速度 $\bar{\boldsymbol{u}}_1$ および $\bar{\boldsymbol{u}}_2$, S'系に対しては速度 $\bar{\boldsymbol{u}}_1'$ および $\bar{\boldsymbol{u}}_2'$ をもつものとする．特に，衝突の前後で粒子1が反対向きの速度，すなわち

$$\bar{\boldsymbol{u}}_1 = -\alpha \boldsymbol{u}_1 \tag{7}$$

をもつような衝突の仕方について考えよう．ここでαは正の数である．この場合，問題の対称性から考えて，

$$\bar{\boldsymbol{u}}_2' = -\alpha \boldsymbol{u}_2' \tag{8}$$

が成り立たなければならない．ただし，ここで比例係数αは (7) と同じとする．なぜならば，(5) によれば S' 中にある観測者に対する粒子2の運動は，S 中にある観測者に対する粒子1の運動と同じでなければならないからである．(5), (7) と (8) から

$$\bar{\boldsymbol{u}}_2' = -\bar{\boldsymbol{u}}_1 \tag{9}$$

がえられ，(II. 55) によれば，これはまた

$$\bar{\boldsymbol{u}}_1' = -\bar{\boldsymbol{u}}_2$$

を意味する．

衝突の前後で函数的関係 (2) が同じであると仮定すれば，S系における運動量の保存から

$$f(u_1)\boldsymbol{u}_1 + f(u_2)\boldsymbol{u}_2 = f(\bar{u}_1)\bar{\boldsymbol{u}}_1 + f(\bar{u}_2)\bar{\boldsymbol{u}}_2 \tag{10}$$

がえられる．

さらに，衝突前の粒子1の速度が $\boldsymbol{v}$ に直交する，すなわち

$$(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \tag{11}$$

と仮定すれば，(5), (7) と (9) により，この関係は

$$(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \tag{12}$$

および

$$(\bar{\boldsymbol{u}}_1 \cdot \boldsymbol{v}) = (\bar{\boldsymbol{u}}_2' \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \tag{13}$$

を意味する．したがって速度 $\boldsymbol{u}_2$ と $\bar{\boldsymbol{u}}_2$ の変換には簡単な変換式 (II. 57) を用いることができ，

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2'(1-v^2/c^2)^{1/2} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_1(1-v^2/c^2)^{1/2}, \tag{14}$$

および

$$u_2^2=(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2)=u_1^2(1-v^2/c^2)+v^2 \tag{15}$$

をえる．この際，$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{v}$ の積は (11) によって零にする．

同様に (9) によって

$$\left.\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{u}}_2&=\bar{\boldsymbol{u}}_2'(1-v^2/c^2)^{1/2}+\boldsymbol{v}=-\bar{\boldsymbol{u}}_1(1-v^2/c^2)^{1/2}+v\\ \bar{u}_2^2&=\bar{u}_1^2(1-v^2/c^2)+v^2\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

をえる．(10) に (14), (15) および (16) を代入すれば

$$\begin{aligned}&[f(u_1)-(1-v^2/c^2)^{1/2}f\{\sqrt{[u_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\}]\boldsymbol{u}_1+\\ &\quad+f\{\sqrt{[u_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\}\boldsymbol{v}=\\ &\quad=[f(\bar{u}_1)-(1-v^2/c^2)^{1/2}f\{\sqrt{[\bar{u}_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\}]\bar{\boldsymbol{u}}_1+\\ &\quad+f\{\sqrt{[\bar{u}_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\}\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{17}$$

なる式をえる．このベクトル式に $\boldsymbol{v}$ をかければ (11) と (13) により

$$f\{\sqrt{[u_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\}=f\{\sqrt{[\bar{u}_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\}$$

をえる．したがって，f はその変数に関する単調函数であると仮定すれば

$$\bar{u}_1=u_1. \tag{18}$$

したがって (7) で $\alpha=1$ となる．このことは，他方 (17) で $\boldsymbol{v}$ に比例する項が打消し合うことを意味している．故に $\bar{\boldsymbol{u}}_1$ と $\boldsymbol{u}_1$ の係数に等しい．したがって (17) は

$$[f(u_1)-f\{\sqrt{[u_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\}(1-v^2/c^2)^{1/2}](\boldsymbol{u}_1-\bar{\boldsymbol{u}}_1)=0 \tag{19}$$

となる．さらに (7), (18) によれば

$$\boldsymbol{u}_1-\bar{\boldsymbol{u}}_1=2\boldsymbol{u}_1\neq 0$$

であるから，(19) で $\boldsymbol{u}_1-\bar{\boldsymbol{u}}_1$ の係数は零，すなわち

$$f(u_1)=(1-v^2/c^2)^{1/2}f\{\sqrt{[u_1^2(1-v^2/c^2)+v^2]}\} \tag{20}$$

でなければならない．

いま考えているような種類のどのような衝突に対しても運動量の保存がえられるためには，f は，独立変数 u_1, v の任意の値に対して，(20) なる式を満足しなければならない．この函数方程式の解は (20) で u_1 を零におくことによってえられる．このようにして

$$f(v)=\frac{f(0)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \tag{21}$$

がえられる．(21) で与えられた函数 $f(u)$ が u_1 と v の任意値に対して (20) を満足することは容易に確められる．

このようにして，(2) と (21) から，速度 $\boldsymbol{u}$ なる粒子の相対論的質量として

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{22}$$

がえられる．ここで $f(0)=m_0$ とおいた．定数 m_0 は，いわゆる粒子の固有質量，または静止質量と呼ばれるもので，Newton 力学でその粒子に附与される質量と同じものである．そして (10) 式を成立させる仮定には，考えている衝突過程で静止質量が不変であることがすでに含まれている．粒子の運動量としては (1) と (22) から

$$\boldsymbol{p}=\frac{m_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{23}$$

がえられる．

27. 力．仕事．運動エネルギー

粒子の速度，したがって粒子の運動量が時間が経っても一定であることをもって，われわれは粒子が外部から作用を受けない状態にあると判断する．これに対して，粒子の運動量が変化していれば，粒子は単位時間あたりの運動量の変化に等しい力 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けているとする．すなわち

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}. \tag{24}$$

方程式 (24) は粒子の速度が小さいときには Newton の運動の第 2 法則に等しくなるが，この方程式 (24) を相対論的領域における力の定義を与える式と見なすことにする．方程式 (24) は，粒子の運動量の変化を生ずる原因である系の物理的状態に対する，力 $\boldsymbol{F}$ の依存関係が与えられておれば，運動方程式と見なしてさしつかえない．

Newton 力学におけると同様に，単位時間あたりの力のする仕事 A は

$$A=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{25}$$

によって定義する．ここに $\boldsymbol{u}$ は粒子の速度である．さらに，粒子の運動エネルギー T は方程式

$$\frac{dT}{dt}=A=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}), \tag{26}$$

によって定義されるが，この式は単位時間あたりの運動エネルギーの変化が仕事 A に等しいことを表わしている．

(23), (24) 両式を方程式 (26) の右辺に代入すれば，(26) は

$$A=\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{d}{dt}\frac{m_0\boldsymbol{u}}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\right)=\frac{m_0}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)+\frac{m_0u^2}{c^2(1-u^2/c^2)^{3/2}}u\frac{du}{dt}$$

となり，さらに $\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=u\frac{du}{dt}$ を用いれば

$$A=\frac{m_0u}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\right) \tag{27}$$

がえられる．これを，ふたたび (26) に代入すれば (26) 式は直ちに積分できる．この積分によって速度 u の粒子の運動エネルギーとして

$$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}+C \tag{28}$$

がえられる．C は積分定数である．$u=0$ のときは運動エネルギーは零であるべきであるから，C の値は

$$C=-m_0c^2$$

となる．結局

$$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}-m_0c^2. \tag{29}$$

u が c にくらべて小さいときには，上式を $(u/c)^2$ の項で展開できる．この展開の第1近似をとれば運動エネルギーに関する Newton 力学の表わし方

$$T=\frac{1}{2}m_0u^2 \tag{30}$$

になる．このように $(u/c)^2$ で展開して第1近似をとれば，速度が c にくらべて小さい領域内では相対論的力学に現われる量，およびこれらの量の間の関係式はすべて Newton 力学においてそれぞれ対応する量および関係式に一致する．Newton 力学の相対論的力学よりのずれは，すべての場合において大きくても $(u/c)^2$ の order である．Newton 力学に立った初期の電子論が u/c の1次の order の大きさの効果をすべて説明できた理由はここにある．逆に速度 u が c に近づくと，Newton 力学の相対論的力学よりのずれは非常に大きくなる．$u\to c$ の極限では (22) で与えられる質量ならびに (29) で与えられる運動エネルギーは共に無限大になり，このことから力学においても c は極限速度の役割を果していることがわかる．

28. 運動量エネルギーおよび力に対する変換式

特殊 Lorentz 変換 (II. 24) で結ばれている2つの慣性系 S, S' を考えることにしよう．このときには，粒子の運動量と運動エネルギーは両系で (23) と (29) の形の式で与えられる．粒子の速度の変換式 (II. 45) から粒子の運動量およびエネルギーの変換式がえられる．

ここで

$$E=T+m_0c^2=\frac{m_0c^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}=mc^2 \tag{31}$$

によって定義される量Eを導入すると便利である．Tと一定値 m_0c^2 だけ異なる量Eは，粒子の運動エネルギーの尺度となる量で，今のところ定数 m_0c^2 になんら物理的意味を与えてはいないが，Eを，しばしば簡単に，自由粒子のエネルギーと呼んでいる．S' 系でも同様な量 $E'=T'+m_0c^2$ が導入される．

(23), (31) と (II. 45) の逆の関係式，および (II. 48) の逆の関係式により，

$$p_x=\frac{m_0u_x}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{m_0(1+vu'_x/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}\sqrt{(1-u'^2/c^2)}}\left(\frac{u'_x+v}{1+vu'_x/c^2}\right)$$
$$=\frac{m_0(u'_x+v)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}\sqrt{(1-u'^2/c^2)}},$$

すなわち，

$$p_x=\frac{p'_x+vE'/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \tag{32 a}$$

をえる．全く同様にして

$$p_y=p'_y,\quad p_z=p'_z,\quad E=\frac{E'+vp'_x}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \tag{32 b}$$

がえられる．

(32) の諸式と Lorentz 変換 (II. 24′) を比べれば，この4つの量

$$p_x,\ p_y,\ p_z,\ E/c^2 \tag{33}$$

は，時空座標 x, y, z, t と同様に変換されることがわかる．したがって，第II章の (15), (13) および (13′) と同様に

$$p^2-\frac{E^2}{c^2}=p'^2-\frac{E'^2}{c^2} \tag{34}$$

が成立する．(23) と (31) から，不変量 (34) は一定値 $-m_0^2c^2$ を有することがわかる．したがって任意の慣性系で

$$p^2-\frac{E^2}{c^2}=-m_0^2c^2,$$

すなわち，

$$E=c(m_0^2c^2+p^2)^{1/2} \tag{35}$$

となる．故に粒子の速度としては，

$$u=\frac{pc^2}{E}=\frac{dE}{dp} \tag{36}$$

がえられる．

(33)が与えられる量は直交軸の回転の際にも座標 (x, y, z, t) と同様に変換さ

れるから，運動量とエネルギーは，もっと一般的な Lorentz 変換 (II. 25′) に際して，次のベクトル式で書かれるような変換をうける．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}&=\boldsymbol{p}'+\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}')\{1-\sqrt{(1-v^2/c^2)}\}+E'v^2/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \\ E&=\frac{E'+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}')}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

(II. 30) に相当する (34) が (37) からえられることは容易に確めることができる．

次に n 個の自由粒子よりなる系を考えよう．その i 番目の粒子の運動量，エネルギーをそれぞれ $\boldsymbol{p}^{(i)}$ および $E^{(i)}=T^{(i)}=m_0^{(i)}c^2$ で表わせば，この系の全運動量，全エネルギーは，

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}^{(i)},\quad E=\sum_i E^{(i)}=T+m_0c^2 \\ &T=\sum_i T^{(i)},\quad m_0=\sum_i m_0^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

で定義される．ここで $T^{(i)}$, $m_0^{(i)}$ はそれぞれ，i 番目の粒子の運動エネルギーと静止質量である．

変換式 (32), (37) は各粒子について別々に成立し，これらは 1 次変換であるから，全運動量，全エネルギーに対しても同じ変換式が成り立つことは明らかである．このように (32), (37) 式は，その $\boldsymbol{p}$, E や T が系の全運動量，全エネルギーを表わし，m_0 が (38) によって各粒子の固有質量の和を表わすものと考えれば，これらをそのまま自由粒子の系に対しても拡張適用することができる．変換式 (32) と (37) から，粒子間の衝突の際，運動量保存の定理が任意の慣性系で成り立つ限り，全エネルギー E もまた，任意の慣性系で保存されなければならないことが解る．

ふたたび 1 個の粒子よりなる系に戻れば，(24) と (26) 式は，

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}, \tag{39a}$$

$$\frac{dE}{dt}=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{39b}$$

なる形に書ける．

(39) は，任意の慣性系で成り立つはずであるから，(39) の左辺の量についてすでに知っている変換の性質から，力 $\boldsymbol{F}$ の変換式を導きだすことができる．(II. 25′) と (II. 26) から，

$$\frac{dt}{dt'}=\frac{1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}')/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$$

をえる．よって，(37) により，

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt'}\frac{dt'}{dt}$$

$$=\frac{(1-v^2/c^2)^{1/2}\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{v}\left\{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}')[1-\sqrt{(1-v^2/c^2)}]+(\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{u}')\frac{v^2}{c^2}\right\}\Big/v^2}{1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}')/c^2}, \quad (40)$$

となる．ここで $\boldsymbol{F}'$ は S' 系での力である．これからわかるように相対論的力学では，力の概念は Newton 力学の場合のような絶対的意味をもちえないのである．

t の代りに粒子の固有時 τ を導入し，Minkowski の力

$$\boldsymbol{F}_M=\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \quad (41)$$

を導入すれば (39) 式は，(II. 38) により，

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}=\boldsymbol{F}_M, \qquad \frac{dE}{d\tau}=\boldsymbol{F}_M\cdot\boldsymbol{u} \quad (42)$$

と書かれる

τ は不変量であるから (42) の左辺に現われる $\{\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{E}/c^2\}$ なる量は，時空座標 $\{\boldsymbol{x}, t\}$ と同じに変換する．したがって，右辺の量 $(\{\boldsymbol{F}_M, (\boldsymbol{F}_M\cdot\boldsymbol{u})/c^2\}$ も同じ変換をうける．このことは (40), (II. 55) および (II. 56) から，初等的な計算によって直接示すこともできる．

29. 双曲線運動．一定の磁場内における荷電粒子の運動

前述の通り，方程式 (39 a) をある粒子の運動方程式と見ることができるのは，力 $\boldsymbol{F}$ がその粒子の運動量の変化をひき起す物理系を記述する変数の函数として与えられているときである．さて粒子の速度が c にくらべて小さければ相対論的方程式は Newton の運動の第 2 法則に一致すべきである．そこで，ある瞬間において粒子の速度が零であるような慣性系 S° においては力 $\boldsymbol{F}^\circ$ は Newton 力学の意味の力と一致すると仮定することができる．任意の座標 S における力 $\boldsymbol{F}$ は変換式 (40) を用いて計算すれば求められる．S 系に対する粒子の速度を $\boldsymbol{u}$ で表わし，(40) 中の S' 系として静止系 S° をとれば，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'=0$ であるから S 系における力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^\circ(1-u^2/c^2)^{1/2}+\boldsymbol{u}\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}^\circ)}{u^2}\{1-(1-u^2/c^2)^{1/2}\} \quad (43)$$

で与えられる．ここに $\boldsymbol{F}^0$ は Newton 力学の意味の力である．$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}^0$ をそれぞ

れ $\boldsymbol{u}$ に平行な成分と垂直な成分に分解して

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\parallel}+\boldsymbol{F}_{\perp}, \qquad \boldsymbol{F}^0=\boldsymbol{F}^0_{\parallel}+\boldsymbol{F}^0_{\perp}$$

と表わせば，(43) は次のように簡単な 2 つの式に分解される．

$$\boldsymbol{F}_{\parallel}=\boldsymbol{F}^0_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{F}_{\perp}=\boldsymbol{F}^0_{\perp}(1-u^2/c^2)^{1/2}. \tag{43'}$$

したがって Newton 力学の意味の力 $\boldsymbol{F}^0$ がわかれば，(43) または (43′) 式を用いて任意の座標系 S における力 $\boldsymbol{F}$ を計算できることになる．たとえば電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{H}$ 内を速度 $\boldsymbol{u}$ で走る荷電粒子に作用する力をこの方法で求めると (第 5 章，§ 58)，それは Lorentz の公式

$$\boldsymbol{F}=e\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\right] \tag{44}$$

で与えられることがわかる．ここで e は粒子の電荷，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}$ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{H}$ のベクトル積を表わしている．

さて運動方程式 (39a) の左辺は (1), (31) および (39b) を用いて下のように変形できる．

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{d(m\boldsymbol{u})}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{dm}{dt}\boldsymbol{u}=m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt}\boldsymbol{u}$$

$$=m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\right)\boldsymbol{u},$$

上式中の m は (22) で与えられる相対論的質量である．この結果を (39a) に代入すれば

$$m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{F}-\frac{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})}{c^2}\boldsymbol{u} \tag{45}$$

という形の運動方程式がえられる．この方程式を見れば，粒子の加速度の方向は一般には力の方向と違うことがわかる．このように相対論的力学における粒子の運動は Newton 力学の場合よりも複雑になる．ただ力が常に $\boldsymbol{u}$ に平行か，または常に垂直な場合には粒子の運動は比較的簡単である．下にこの両方の場合を例題として取り扱うことにする．

先ず一定の力 $F=m_0g$ の作用を受け，初速度の方向が力の方向であるような粒子を取り扱う．(45) 式からこの粒子は力の方向に運動を持続する．したがって粒子の運動径路は直線となる．この直線を x-軸に選ぶ．この場合 (39a) は次のような形になる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right)=\frac{F}{m_0}=g, \quad u=\frac{dx}{dt}.$$

時刻 $t=0$ において速度が零であるとすれば，上式を先ず積分して

$$\frac{u}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=gt,$$

すなわち

$$u=\frac{dx}{dt}=\frac{gt}{\sqrt{[1+(gt/c)^2]}} \tag{46}$$

がえられる．次に $t=0$ では $x=0$ とすれば (46) の積分によって

$$x=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right]^{1/2}-1\right\}, \tag{47}$$

すなわち

$$\left(x+\frac{c^2}{g}\right)^2-c^2t^2=\frac{c^4}{g^2} \tag{48}$$

が求められる．この運動を xt—diagram に描けば式 (48) は双曲線を表わす．これがこの運動を双曲線運動†とよぶゆえんである．

しかし $(gt)^2\ll c^2$ が成立するかぎり，(gt/c) の 2 乗以上の高次項は省略できるので，この場合には (47) より粒子の等加速度運動を表わす通常の関係式

$$x=\frac{1}{2}gt^2$$

がえられる．

一方 t の大きな値，すなわち速度の大きな値に対しては t が増すときの x の増し方は Newton 力学の場合の増し方よりも緩やかである．$t\to\infty$ の極限では，(46) で与えられる u は g の値にはよらずに有限値 c に近づく．このように粒子はどんなに大きな力を絶えず受けても光速度を越える速度に達することはできないのである．これは 49 頁の §21 での考察と一致している．強さ一定の電場内を電場の方向に平行な速度で運動している荷電粒子の運動もこれと同じ型に属するものである．

次に強さ一定の**磁場** $\boldsymbol{H}$ 内における荷電粒子の運動を考察することにする．粒子の速度 $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{H}$ に平行な成分と垂直な成分に分けて $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_\parallel+\boldsymbol{u}_\perp$ と書けば，(44) より粒子に作用する力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}=\frac{e}{c}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})=\frac{e}{c}(\boldsymbol{u}_\perp\times\boldsymbol{H}), \tag{49}$$

になり，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_\perp$ および $\boldsymbol{H}$ のいずれとも直交する．したがって

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})=0$$

が成立し，(45) は Newton 力学におけると同じ形

---

† M. Born, *Ann. d. Phys.* **30**, 1 (1909); A. Sommerfeld, ibid **33**, 670 (1910)

$$m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{F}=\frac{e}{c}(\boldsymbol{u}_{\perp}\times\boldsymbol{H}) \tag{50}$$

になる．ただしmは相対論的質量を表わしているが，(39b) によりEしたがってmもuも時間が経っても不変な量なので，この場合mは定数（時間的に）になっている．(50) より加速度の$\boldsymbol{H}$方向の成分は零となって磁場方向の速度成分$\boldsymbol{u}_{\parallel}$は時間が経っても一定である．また$u=|\boldsymbol{u}|$も一定となるのでベクトル$\boldsymbol{u}_{\perp}$の大きさ$|\boldsymbol{u}_{\perp}|$も一定でなければならぬ．この結果，粒子の軌道は磁場の方向を軸とする螺旋になる．そして$\boldsymbol{H}$に垂直な平面への軌道の射影は，円運動の向心力$mu_{\perp}^2/\rho$が力 (49) に等しいという条件できまる半径ρの円である．このようにして

$$\frac{mu_{\perp}^2}{\rho}=\frac{e}{c}u_{\perp}H,$$

すなわち

$$p_{\perp}=mu_{\perp}=\frac{e}{c}H\rho \tag{51}$$

という関係がえられる．とくに粒子の速度が磁場の方向に垂直な場合には関係式 (51) は

$$p=\frac{c}{e}H\rho \tag{52}$$

という簡単な形になる．この関係式を用いれば$\boldsymbol{H}$とρの測定によって荷電粒子の運動量が決定できる．そして事実この方法は宇宙線の分析，β線および質量分析学において特に役に立ってきた．

30. エネルギーと質量が同等なこと

ふたたびn個の自由粒子よりなる系Σ_1について考えよう．2つの慣性系SとS'におけるこの力学系の全運動量と全エネルギーをそれぞれ ($\boldsymbol{p}$, E) と ($\boldsymbol{p}'$, E') とすれば，このダッシュのついている変数と，ついていない変数の間の関係は (32) または (37) で与えられる．このような系に対しては，(34) なる不変量は常に負の値を有する．$n=1$の場合には，この不変量は (35) によって$-m_0^2c^2$に等しい．また (35) が各粒子について成り立つことに注意すれば，p^2-E^2/c^2は，$n>1$の場合$-\sum_i(m_0^{(i)}c)^2$より小さくなければならぬことが容易にわかる．このことはΣ_1の全運動量$\boldsymbol{p}'$が零になるような慣性系S'を選びだすことが常に可能であることを意味する．それは，(37) で$\boldsymbol{p}'=0$とおいて，S'とSの相対速度を求めれば，

$$v=\frac{c^2}{E}\boldsymbol{p} \tag{53}$$

がえられる．$p^2-E^2/c^2<0$ であることから $E>cp$ となり，(53) によって定まる相対速度 v はつねに c より小さい．これは相対論の基本的要請である．

$\boldsymbol{p}^0=0$ となるような慣性系 S^0 を Σ_1 の静止系，または，重心系という．それは Σ_1 系が全体として，S^0 内に静止している1個の粒子と同じ力学的性質を有するからである．さて，任意の慣性系 S に対して S^0 がもっている速度を $\boldsymbol{u}$ とすれば，$\boldsymbol{u}$ はまた S に対して系 Σ_1 が全体として運動する速度を表わす．

(37) 式の場合の S' 系を静止系 S^0 とすれば，系 Σ_1 の全運動量，全エネルギーをその系の速度 $\boldsymbol{u}$ の函数として表わす式

$$\boldsymbol{p}=\frac{E^0\boldsymbol{u}}{c^2\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\qquad E=\frac{E^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{54}$$

がえられる．さてこのような系の全質量も，1個の粒子の場合と同様に（式 (1) 参照）運動量と速度の比として定義するのが自然のように思われる，そうすれば，(54) から，Σ_1 の質量は

$$M=\frac{E^0/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{E}{c^2}=\frac{M_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{55}$$

であるとしなければならないことになる．これは静止質量 $M_0=E^0/c^2$ に対応する質量である．静止質量 M_0 は (38) によって，

$$M_0=E^0/c^2=m_0+T^0/c^2 \tag{56}$$

なる形に書くことができる．ここで，m_0 は全粒子の静止質量の和であり，T^0 は静止系におけるこれらの粒子の全運動エネルギーを表わす．

Σ_1 の静止質量の式 (56) を用いると Σ_1 の運動量エネルギーの式 (55) は，1個の粒子の場合に成り立つ式 (23) と (31) と全く同じになる．(56) 式から，Σ_1 の静止質量が各粒子の静止質量全部の和より，T^0/c^2 だけ大きいことがわかる．このように，系の内部運動エネルギーがこの系の慣性質量を T_0/c^2 という分量だけ増加させることになる．

(54) と (56) により，(34) の不変式は，1個の粒子の場合に成り立つ式 (35) と同様な

$$p^2-E^2/c^2=-M_0^2c^2 \tag{57}$$

の形に書くことができる．(57) 式はまた Σ_1 の静止質量の定義に使うこともできる．

自由粒子系の内部運動エネルギーが慣性質量に効いてくるというこの重要な結論は，すべての種類のエネルギーに拡張することができる．運動量やエネル

ギーの保存の定理があらゆる物理過程について成り立つものとすれば，任意の分量のエネルギー ΔE に質量

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2} \tag{58}$$

が対応することを示すことができる．

この重要な定理を証明するため，自由粒子よりなる系 Σ_1 と他の任意の物理系 Σ_2 との衝突を考え，その際ある分量の運動量とエネルギーが Σ_1 から Σ_2 に移っていくものとする．衝突過程の前後において Σ_1 内の粒子は自由である．したがって，この過程の前後における Σ_1 の全運動量および全エネルギーは (32) および (37) なる形の式によって変換される．さて，この“衝突”後のエネルギー，運動量の変換式から衝突前の対応する変換式を引き算し，この過程の前後における Σ_1 の運動量，エネルギーの差を S と S' 系で測った値をそれぞれ $(\Delta\boldsymbol{p}, \Delta E)$ と $(\Delta\boldsymbol{p}', \Delta E')$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{p}&=\Delta\boldsymbol{p}'+\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{p}')\{1-(1-v^2/c^2)^{1/2}\}+v^2\Delta E'/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\\ \Delta E&=\frac{\Delta E'+(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{p}')}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

がえられる．この過程で運動量とエネルギーが保存されるならば，系 Σ_2 の運動量およびエネルギーは，S 系で $\Delta\boldsymbol{p}$, ΔE なる量だけ，S' 系では $\Delta p'$, $\Delta E'$ なる分量だけ増していなければならない．

(59) から，(34) と同様にして

$$|\Delta\boldsymbol{p}|^2-\frac{(\Delta E)^2}{c^2}=|\Delta\boldsymbol{p}'|^2-\frac{(\Delta E')^2}{c^2} \tag{60}$$

が1つの不変量であることが結論できる．この不変量が負の値を有するときは，$\Delta\boldsymbol{p}'=\Delta\boldsymbol{p}^0=0$ になるような慣性系 $S'=S^0$ を見出すことができる．そして S に対する S^0 の速度を $\boldsymbol{u}$ とすれば，(59) から

$$\Delta\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{u}\Delta E^0/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\qquad \Delta E=\frac{\Delta E^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}. \tag{61}$$

をえる．

これらの式を (22) および (23) 式と比べてみれば Σ_2 に移されたエネルギー ΔE^0 にも静止質量

$$\Delta m_0=\frac{\Delta E^0}{c^2} \tag{62}$$

と S 系における質量

$$\Delta m = \frac{\Delta m_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} = \frac{\Delta E^0/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} = \frac{\Delta E}{c^2} \tag{63}$$

を附与しなければならないことがわかる．なぜなら，この過程における Σ_2 の運動量の変化は，あたかも静止質量が Δm_0, S に対する速度が $\boldsymbol{u}$ の質点が Σ_2 系につけ加えられた場合と同じだからである．(35) の場合と同様に，この不変量は

$$|\Delta \boldsymbol{p}|^2 - \frac{(\Delta E)^2}{c^2} = -(\Delta m_0)^2 c^2 \tag{64}$$

と書ける．この式は，やりとりされたエネルギーによる静止質量の簡単な表現を与える．

Σ_2 は勝手な物理系で，これに移されたエネルギーはどんな姿に変っていてもよいわけであるから，(63) 式は，エネルギーがどんな形であっても成り立たねばならぬことがわかる．例えば Σ_2 なる系は電磁場であって，Σ_1 から移ってきたエネルギーは電磁輻射の形になっていてもよいわけである．したがって電磁輻射のエネルギーや運動量の変換式も (59) で与えられなければならぬ．さらに Σ_2 がこれに移ってきたエネルギーを熱に変えるような物体の場合にはその物体に移った熱エネルギーはその質量に効いてきて，物体の質量は加熱によって増大することになる．最後に，Σ_2 が移ってきたエネルギーをポテンシャル・エネルギーに変えるような系であれば，系のポテンシャル・エネルギーに対してもまた慣性質量が附与されなければならぬことになる．

以上の考察，特に (64) 式から，エネルギー ΔE のもっている質量という概念は，このエネルギーと特定な関係をもっている運動量 $\Delta \boldsymbol{p}$ が解っている場合に限って明確な意味をもつ．この質量が実数にきまるためには，(64) の左辺が負でなければならぬ．すなわち

$$|\Delta E| > c|\Delta \boldsymbol{p}| \tag{65}$$

である場合に限って，静止系が考えられ，したがって何らかの意味で速度とかエネルギーに対応する実数値の質量というものが考えられるのである．

上の考察で，エネルギーが系 Σ_1 の方へ移る場合をも取り扱えるためには，ΔE は負でもよいとせねばならぬ．したがって，Σ_2 の全運動量 $\boldsymbol{p}_2$ および全エネルギー E_2 が Σ_1 に移されるような過程を考えれば，変換式 (59) は任意の系の全運動量および全エネルギーについて成り立たなければならぬことがわかる．さらに

$$p_2^2 - \frac{E_2^2}{c^2} \leqq 0 \tag{66}$$

が成り立つ場合には，この系は (64)，すなわち

$$-M_0^2c^2=p_2^2-\frac{E_2^2}{c^2} \tag{67}$$

で定義される実数の静止質量を有する．$p_2^2-\dfrac{E_2^2}{c^2}$ が零であるような場合には，その系の静止質量は零である．

Σ_2 がいろいろな場よりなる系であって，各々の場のエネルギー密度は場の変数の斉次な函数でかつ正の値のみが許されるものである場合には，常に (66) が満足される．E_2 が cp_2 より小さい場合には，$E'_2=0$, $\boldsymbol{p}'_2\neq 0$ であるような慣性系 S' を見出すことができる．そのためには，$\boldsymbol{p}_2$ と E_2 の変換式 (59) 中の $\boldsymbol{v}$ に

$$\boldsymbol{v}=E_2\boldsymbol{p}_2/p_2^2 \qquad (|\boldsymbol{v}|<c) \tag{68}$$

なる値を与えれば十分である．

そのときは (59) の逆関係によれば

$$E'_2=\frac{E_2-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}=0, \qquad p'_2=(p_2^2-E_2^2/c^2)^{1/2}>0$$

となるはずである．ところがエネルギー密度と場の変数の関係について上で行った仮定によれば，E'_2 が零になりうるのは，場自身が零になる場合に限る．そして，この場合には，場の運動量 $\boldsymbol{p}'_2$ も零でなければならない．したがって，(66) なる関係は，すべての巨視的な物理系に対して成り立つと仮定するのが自然である．(66) の等号が成り立つ系の中で最も簡単な例は平面電磁波の波列である．(67) によれば，このような系の質量は零であるべきであり，したがって速度はどの慣性系でも $u=c^2p_2/E_2=c$ でなければならない．

逆に質量が m の質点はエネルギー $E=mc^2$ をもち，特にその粒子の静止系では，エネルギー $E_0=m_0c^2$ をもつことが示される．このことが現実的な意味をもつのは，粒子の質量として表わされているエネルギーを，例えば他の粒子の運動エネルギーに変えうるような過程が実在する場合に限る．このような“消滅過程”が実際に自然界に存在するかどうかはわれわれには予知できない．しかしある条件のもとに，実際にこれが存在し，この過程に対しても相対性原理や運動量の保存定理が成り立っているならば，質量 m_0 が消滅するとき開放されるエネルギーの量は $E_0=m_0c^2$ に等しいはずである．

このことを証明するため，この過程によって開放された運動量やエネルギーは以前に考えた自由粒子系 Σ_1 に移されるものとする．そしてもう一度2つの慣性系 S, S^0 を考えよう．ここで S^0 はこの粒子の静止系であるとする．やりとりされる運動量とエネルギーは，S と S^0 系でそれぞれ $(\Delta\boldsymbol{p}, \Delta E)$ と $(\Delta\boldsymbol{p}^0,$

ΔE^0) であるとすれば，(59) により

$$\Delta \boldsymbol{p}=\Delta \boldsymbol{p}^0+\frac{\boldsymbol{u}}{u^2}\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\Delta \boldsymbol{p}^0)\{1-\sqrt{(1-u^2/c^2)}\}+u^2\Delta E^0/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \tag{69}$$

をえる．ここで $\boldsymbol{u}$ は S に対する粒子の速度である．

静止系ではこの粒子の運動量は零であり，その消滅後は，粒子の運動量，エネルギーはどの慣性系に対しても零であるから，E^0 で消滅前静止している粒子がもっている未知のエネルギー量を表わせば

$$\Delta \boldsymbol{p}^0=0, \qquad \Delta E^0=E_0 \tag{70}$$

であることは明らかである．さらに，$\Delta \boldsymbol{p}$ は消滅前に S に対する粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ に等しい．すなわち

$$\Delta \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}=\frac{m_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{71}$$

である．(70), (71) を (69) に代入すれば

$$\frac{m_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{E_0\boldsymbol{u}/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},$$

あるいは

$$E_0=m_0c^2 \tag{72}$$

をえる．

したがって速度が u の自由粒子がもっている全エネルギーは

$$E=E_0+T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=mc^2 \tag{73}$$

でなければならない．ただしここでわれわれは (29), (22) なる関係を用いた．(31) に導入した E なる量は，このように深い物理的意味をもっているのである．(72) で与えられるエネルギーを粒子の固有エネルギー，または静止エネルギーという．

このようにして，すべてのエネルギー E に質量 E/c^2 が対応し，また質量 m にエネルギー mc^2 が対応することを示す有名な Einstein の式†

$$E=mc^2 \tag{74}$$

の一般的証明がえられた．このエネルギーと質量の同等性の定理は，特殊相対性理論の最も重要な結果の一つである．この定理に含まれている質量が慣性質量であることに注意すべきである．ところが一般相対性理論の根本仮定の一つ

† A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **18**, 639 (1905); **23**, 317 (1907), H. A. Lorentz, *Das Relativitätsprinzip.* 3 *Haarlemer Vortäge*, Leipzig 1914; id., *Amst. Versl.* **20**, 87 (1911)

(VIII 章 §83 参照) は，慣性質量と重力質量の同一性であるから，Eなる分量のエネルギーには (74) で与えられるような重力質量 m を附与しなければならない．

31. 非弾性衝突．閉じた質点系の質量

相対論的力学の実験的な検証に関する論議に進むに先立って，この節で質量とエネルギーが同等であるという一般定理を示す簡単な例について考察する．

静止質量が共に m_0 の等しい 2 つの粘土製の球が慣性系 $S'=S^0$ で同一直線上を同じ大きさで反対向きの速度で走る場合，この 2 球は完全に非弾性的な正面衝突をする．重心系 S^0 における衝突前の全運動量および全エネルギーは

$$\boldsymbol{p}^0=0, \qquad E^0=2m_0c^2+T^0, \tag{75}$$

で，ここで T^0 は全運動エネルギーを表わす．S^0 に対して速度 $\boldsymbol{u}$ で運動している慣性系 S における衝突前の全運動量および全エネルギーは，(37) と (75) を用いて

$$\boldsymbol{p}=\frac{(2m_0+T^0/c^2)\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \tag{76a}$$

$$E=\frac{2m_0c^2+T^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}. \tag{76b}$$

となる．非弾性衝突をした後は，2 つの粘土球は合体して 1 つの球になる．S^0 系においては運動量保存の法則から，合体して 1 つになった球の運動量は 0 になり，したがって速度も 0 になる．S^0 系おにいて最初に持っていた運動エネルギー T^0 は熱に転換し，エネルギー保存則より，発生した熱量 Q^0 については

$$Q^0=T^0 \tag{77}$$

が成立する．

衝突後の粘土球の S 系に対する速度は $\boldsymbol{u}$ であり，運動量 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p}=\frac{M_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{78}$$

である．ただし M_0 は衝突後の球の静止質量である．S 系においても運動量保存則は成立しなければならぬから，(78) と (76a) とは等しくなければならぬ．これに (77) から

$$M_0=2m_0+\frac{Q^0}{c^2} \tag{79}$$

がえられ，衝突後の球の静止質量 M_0 は最初の球の静止質量の和に熱エネルギーの質量を加えたものに等しいことになる．

S 系における衝突後の球のエネルギーは，(79) と (77) の両式より

$$E=\frac{M_0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{2m_0c^2+T^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \tag{80}$$

となり，これは衝突前の球の全エネルギー (76b) に等しく，S 系においてエネルギー保存則が成立するという定理を裏づけている．衝突前の全運動エネルギーと衝突後のそれとの差を (76, b), (79) および (77) を用いて求めると，それは

$$T_{前}-T_{後}=\left(\frac{2m_0c^2+T_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}-2m_0c^2\right)-M_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}-1\right)=Q^0 \tag{81}$$

となって，運動エネルギーを計算するさい，基準に選んだ慣性系にはよらない不変量である．

次にポテンシャル・エネルギーの慣性に関する実例として，互に引力を及ぼしあって集団を形成している粒子からなる系 Σ について考察を進める．先ずわれわれは次のような慣性系 S' が存在するとする．すなわち S' 系においてはすべての粒子の速度が光速度にくらべて非常に小さく，そのため非相対論的な Newton 力学がよい近似になるという仮定をする．原子物理学として固有な現象には Planck の作用量子が必ず関与しているが，このような現象を無視する場合には，原子核がこのような力学系になっていると考えてさしつかえない．すなわち原子核は核子という素粒子からなっており，核子は非常に重いので一般にその速度は c にくらべて小さいと見なすことができる．以上のような S' 系の存在を仮定することは，Σ 系のおのおのの粒子の固有時は皆同じで S' 系における時刻 t' に等しく，さらに粒子間に作用する力は第1近似では粒子の位置の函数と見てよいということを認めることである．さらに力が保存力の場合には，S' 系では力を，各粒子の位置座標の函数として与えられるポテンシャル函数 V' の勾配として表わすことができる．Newton 力学によれば，この力学系の各粒子は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの総和が時間が経っても不変に保たれるような運動をすることになる．

$$T'+V'+H'=\text{const.} \tag{82}$$

この場合，全運動エネルギーはもちろん一般には一定ではない．ポテンシャル・エネルギー V' には積分定数が含まれているが，これを適当に選んで各粒子が互に作用する力が零になるほど遠ざかっているとき $V'=0$ になるようにする．このようにしておいたときには，各粒子が互に束縛されている状態では V' が負になることは明らかである．

上述の仮定をみたす慣性系 S' はいくつかあるはずであるが，その中で Σ

の重心が静止している慣性系を取り上げ，これを S^0 とする．すると S^0 系では明らかに粒子の運動量の総和 $\boldsymbol{p}_0$ が一定でしかも零に等しい．S^0 系に対して x-軸の方向に速度 $\boldsymbol{u}$ で運動している慣性系 S における粒子の運動量の総和 $\boldsymbol{p}$ は (32) を用いれば

$$p_x=\frac{(m_0+T^0/c^2)u}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\qquad p_y=p_z=0 \tag{83}$$

となる．ここで m_0 はもちろん各粒子の静止質量の和である．この系の各粒子の固有時は事実上共通と考えられるので，$\boldsymbol{p}$ を明確に定義された時間変数の函数と見ることができる．自由粒子からなる力学系の場合と違って，この場合の $\boldsymbol{p}$ は時間が経てば**変ってくる**．これは $\boldsymbol{p}$ を表わす式 (83) 中の運動エネルギー T^0 が時間の函数であるからである．

さてポテンシャル・エネルギー V^0 が静止質量 V^0/c^2 をもっていることは忘れてはならない．これを考慮すれば $\boldsymbol{p}$ は S 系における Σ の全運動量ではない．S 系における全運動量 $\boldsymbol{P}$ は

$$P_x=p_x+\frac{V^0u/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{(m_0+H^0/c^2)u}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\quad P_y=P_z=0 \tag{84}$$

で与えられる．ここに $H^0=T^0+V^0$ は静止系における全エネルギーである．$\boldsymbol{p}$ とは反対に，全運動量ベクトル $\boldsymbol{P}$ は明らかに時間が経っても一定である．これは外力の作用を受けない閉じた系については当然成立すべきことである．各粒子間の距離が非常に大きくて，各粒子が自由であると考えてさしつかえない場合には，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}$ となるはずで，この条件からポテンシャル・エネルギーに含まれる積分定数が一意的にきまる．

(184) によって，慣性系 S に対して全体として速度 $\boldsymbol{u}$ で運動している原子核の全運動量 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P}=\frac{M_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{85}$$

であることがわかる．ここに

$$M_0=m_0+H^0/c^2 \tag{86}$$

は原子核の静止質量である．安定な核では H^0 は負である．そして $\Delta E=-H^0$ は，核を構成する粒子を完全にばらばらに離してしまおうとするとき核に与えるべきエネルギーの量すなわち**結合エネルギー**である．$\Delta m=m_0-M_0$ を核の**質量欠損**というが，これは (86) より

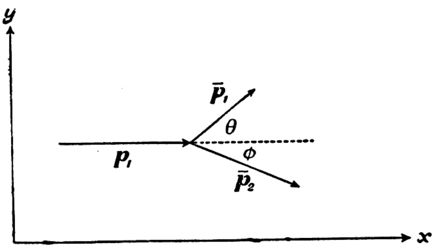
$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2} \tag{87}$$

となる．結合エネルギーと質量欠損とを結ぶ基本的な関係式 (84) は Einstein

の公式 (74) の特別な場合であるが，これが成立することは，数多くの核反応において非常な精密度をもって実験的に検証されている (§32 を参照)†.

32. 相対性力学の実験的検証

§26で，運動量の保存定理が2粒子間の弾性衝突について恒に成り立っているならば，速度による質量の変り方が (22) 式で与えられなければならぬことを知った．それでは，一体どのような大きな速度の場合にも運動量やエネルギーの保存のようなものが存在するかどうかということが次の問題である．この問題の成否は専ら実験によってきめられなければならない．この種の実験をはじめて行ったのは Champion‡ である．彼は高速度で走っている電子 (β-粒子) と静止している電子の間の衝突を Wilson の霧函内で調べた．霧函が静止している座標系 S に対して，速度 $\boldsymbol{u}_1$, 運動量 $\boldsymbol{p}_1=m_0\boldsymbol{u}_1(1-u_1^2/c^2)^{-1/2}$ なる電子1と，速度零，運動量零なる電子2の間の衝突をやや詳しく考察しよう．この衝突で，ある分量の運動量が粒子2に渡される．衝突後の2つの粒子の運動量を $\bar{\boldsymbol{p}}_1$ および $\bar{\boldsymbol{p}}_2$ とし，ベクトル $\bar{\boldsymbol{p}}_1$, $\bar{\boldsymbol{p}}_2$ が入射電子の方向となす角 (第11図をみよ) をそれぞれ θ および ϕ とする．この場合は，相対性力学における保存則を適用することにより θ と ϕ の間に簡単な関係がえられる．次にそれを求めることにしよう．



第 11 図

この場合，運動量およびエネルギーの保存定理が (もし成り立つものである以上) 任意の慣性系で成り立っていなければならないという事実を用いるのが便利である．便宜上実験室系で $\boldsymbol{p}_1$ が x-軸に平行でかつ xy 面内にあるように直交座標軸を選定することにしよう．そのときは，$\boldsymbol{p}_2$ も xy-面内にある．次に重心系 S' を導入すれば，その中では全運動量 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'=0$ である．S' は S に対して一定速度 v で x-軸方向に運動している．(32a) の逆の式から

$$p_x'=\frac{p_x-vE/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$$

である．この式は系の全運動量 $\boldsymbol{p}$, 全エネルギー E についても成り立つと共に，

† このような効果のありうることを最初に論じたのは P. Langévin, *J. de Phys.* (5), **3**, 553 (1913)

‡ F. C. Champion, *Proc. Roy. Soc.* A, **136**, 630 (1932)

個々の粒子についても成り立つ．

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1,\ E=E_1+m_0c^2=m_0c^2+m_0c^2(1-u_1^2/c^2)^{-1/2}$$

であるから，v として次の式がえられる．

$$v=\frac{c^2p_1}{E}=\frac{c^2m_0u_1}{\sqrt{(1-u_1^2/c^2)}m_0c^2\{1+(1-u_1^2/c^2)^{-1/2}\}}=\frac{u_1}{1+\sqrt{(1-u_1^2/c^2)}}. \tag{88}$$

$\boldsymbol{p}_2'=-\boldsymbol{p}_1'$，であるから，この2つの粒子は S' 系に対しては同じ初速 u' を有する．さらに，粒子2は S 系では静止しているから，S' に対するその速度 u' は，S' と S の相対速度 v に等しくなければならない．すなわち

$$u'=v,\qquad \frac{1}{2}E'=E_1'=E_2'=\frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}. \tag{89}$$

さて，重心系で運動量，エネルギーの保存定理を適用すれば，衝突後の粒子の運動量とエネルギーに対して

$$\bar{\boldsymbol{p}}_2'=-\bar{\boldsymbol{p}}_1'\qquad \bar{E}_1'=\bar{E}_2'=\frac{1}{2}\bar{E}'=\frac{m_0c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \tag{90}$$

$$\bar{p}_2'=\bar{p}_1'=\sqrt{(\bar{E}_1'^2/c^2-m_0^2c^2)}=\frac{m_0v}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$$

をえる．したがって，2つの粒子は，衝突後も S' 系に対して同じ速度 v をもっていることになる．そして (90) によれば

$$\frac{v^2\bar{E}_1'^2}{c^4}=\bar{p}_1'^2 \tag{91}$$

である．

第11図から，直ちに

$$\tan\theta=\frac{\bar{p}_{1y}}{\bar{p}_{1x}},\qquad \tan\phi=\frac{-\bar{p}_{2y}}{\bar{p}_{2x}}$$

であることがわかる．

衝突後の2つの粒子の運動量に対して変換式 (32) を用いれば，(90) と (91) により，

$$\begin{aligned}\tan\theta\tan\phi&=\frac{\bar{p}_{1y}'(-\bar{p}_{2y}')(1-v^2/c^2)}{(\bar{p}_{1x}+v\bar{E}_1'/c^2)(\bar{p}_{2x}'+v\bar{E}_2'/c^2)}\\&=\frac{\bar{p}_{1y}'^2(1-v^2/c^2)}{(v\bar{E}_1'/c^2+\bar{p}_{1x}')(v\bar{E}_1'/c^2-\bar{p}_{1x}')}\\&=\frac{\bar{p}_{1y}'^2(1-v^2/c^2)}{v^2\bar{E}_1'^2/c^4-\bar{p}_{1x}'^2}=1-\frac{v^2}{c^2}\end{aligned} \tag{92}$$

をえる．(92) に v の式 (88) を代入すれば結局

$$\tan\theta\tan\phi=\frac{2}{\gamma_1+1} \tag{93}$$

がえられる．ただし

$$\gamma_1=(1-u_1^2/c^2)^{-1/2} \tag{94}$$

とおいた．このように $\tan\theta$ と $\tan\phi$ の積は，2つの粒子の静止質量に（それらが相等しい場合に限り）無関係であって入射粒子の速度のみの函数になる．

$c\to\infty$ の極限にすれば，これに対応する Newton 力学での式がえられる．この極限では

$$\gamma_1=1, \qquad \tan\theta\tan\phi=1$$

すなわち

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\infty$$

したがって

$$\theta+\phi=\frac{1}{2}\pi \tag{95}$$

となる．

つまり，Newton 力学では，2粒子は衝突後互に直交する方向に運動するはずである．このよく知られている現象は，例えば撞球の球の衝突の際に見かけることであり，また，Newton 力学が使えるほど，c に比べて速度の小さい α 粒子とヘリウム核の霧函中における衝突によってもたしかめられている．ところが入射粒子の速度が光の速度に近づくにつれて $\gamma_1>1$ となり，この場合

$$\tan\theta\cdot\tan\phi<1$$

となり，これは，衝突後2粒子の運動方向の間の角が $\frac{1}{2}\pi$ より小さくなることを示している．

この特徴ある現象は，相対性力学の実験的検証のために詳しく研究されている．β 粒子と霧函内に静止している電子の衝突の有様を撮った Wilson 霧函写真によって角 θ, ϕ を測ることができる．そして多くの場合 $\theta+\varphi$ が 90° よりかなり小さい．その上，もし入射 β 粒子の速度，したがって γ_1 が知られている場合には，相対論からの式 (93) を直接検証できることになる．このような測定を Champion が行い†，(93) 式が成り立っていることをたしかめた．このことは，電子間の衝突における運動量，エネルギーの保存定理の実験的検証と見なされるものであり，したがって速度による質量の変化を与える相対論の式 (22) の実験的検証とも見なさるべきものでもある．そして，この測定の

† 83 頁脚注参照

精度は，相対論の展開以前に Abraham† が考えた速度による質量変化の式が成り立たぬことを示すのに十分であったのである．

高速電子が電界および磁界中でその方向を変えることを測定することによって運動方程式 (39a) および (44) 式を直接検証することもできる．一定の強さの磁場が電子の運動方向に直角にかけられている場合には，以前に導いた式 (52) が成立する．すなわち

$$\frac{mu}{e}=\frac{H\rho}{c} \tag{96}$$

である．一方，電子の初速度 $\boldsymbol{u}$ に直角にかけられた一定の強さの電場内を電子が通過する場合には (45) および (44) により電子がもとの軌道からあまりはずれない限り，電子には，電場の方向に加速度 $g=eE/m$ が作用する．したがってこの電場内を距離 l だけ通過する時間 $t=\dfrac{l}{u}$ の間に電子はもとの運動方向に直角に距離

$$\Delta l=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l^2}{u^2} \tag{97}$$

だけ曲げられる．

故に，もし電子が上述のような電場と磁場を同時に通過するときは H, ρ, E, l, Δl を同時に測ることによって (96), (97) により u による m の変動を測ることができる．このような実験は非常に多数の実験家によって行われた‡．そして最近の実験によってえられた結果は相対論による式 (22) とよく一致していた．この実験は同時に，運動する荷電粒子に作用する力に対する Lorentz の式 (44) の検証と見なすこともできる．

もしわれわれが他の実験からその粒子の荷電を知っているときは，その粒子が既知の電場と磁場内でうける変向を測定することによってその粒子の質量の絶対値をきめることができる．このことは，いわゆる質量分析器に利用され，これによって，原子核の質量が非常に精密に決定できたのである．

このように高速荷電粒子の相対論的運動方程式が実験的に証明されたのは相

---

† M. Abraham, *Ann. d. Phys.* **10**, 105 (1903)

‡ 数多くの論文中，次のものを引用しておこう．
W. Kaufmann, *Gött. Nachr. math.-nat. Klasse*, p. 143 (1901); A. H. Bucherer, *Verh. d. Deutschen Phys. Ges.* **6**, 688 (1908); G. Neumann, *Ann. d. Phys.* **45**, 529 (1914); Ch. E. Guye and Ch. Lavanchy, *Arch. de Genève*, **41**, 286, 353, 441 (1916).
また次も見よ
W. Gerlach: *Handb. d. Phys.* **22**, 61 (1926)

当前のことであったのに反して，質量とエネルギーが同等であることを表わす式 (74) および (87) はほんの最近まで検証することができなかった．ポテンシャル・エネルギーや加熱による質量の変化は，これらの式からわかるように，その物体の全質量に比べれば問題にならぬほど小さいことを思えば，これは当然のことと云わねばならない．ところが Einstein の式を単独の原子核に適用する場合には，事情が変ってくる．

前節の終りでえた結果によれば，基底状態にある原子核の質量は，これを構成する個々の核子の質量の和より小さいはずである．(87) によれば，この質量欠損は結合エネルギーの大きい安定な核ほど大きいはずである．質量分析器による原子核質量の測定結果はこの結論を確証した．そして場合によっては，この質量欠損は核の全質量の数パーセントにおよぶのである．

もし質量欠損のわかった核が，質量欠損の値が違う核に変化するような核反能を起させるのに成功すれば，Einstein の式 (74) を実験的に検証することが可能になる．ここではそのような過程の1例について述べるだけにしておこう．リチウムを高速プロトンで衝撃する (Cockcroft-Walton の実験 (1932 年)†) のとき，プロトン ($^1_1$H) はリチウム核 ($^7_3$Li) 内に突入し複合核が形成される．この複合核は不安定で間もなく2個の高速 α-粒子 ($^4_2$He) に分裂してしまう．この過程は次の方程式で表わすことができる．

$$^7_3\mathrm{Li}+^1_1\mathrm{H}=^4_2\mathrm{He}+^4_2\mathrm{He}. \tag{98}$$

この過程に関与する核の質量は質量分析器によって精密に測定されている．最も新しい測定によれば $^7_3$Li の質量は，酸素原子の質量を 16 として 7.01666 である．$^1_1$He, $^4_2$H の質量の値を小数点以下4桁まで書けばそれぞれ，1.0076 および 4.0028 である‡.

したがってこの過程において失われる質量mはこの単位(質量単位という)で

$$m=7.0166+1.0076-2\times4.0028=0.0186$$

グラム単位では，

$$m=0.309\times10^{-25}\ \mathrm{gm} \tag{99}$$

である．Einstein の関係式によれば，この質量は

$$mc^2=27.7\times10^{-6}\ \mathrm{erg} \tag{100}$$

だけのエネルギーに相当する．そしてこれは反応後に α-粒子の運動エネルギーにならなければならない．ところで，α-粒子の飛跡の長さを測定すれば，飛

† J. D. Cockcroft and G. T. S. Walton, *Proc. Roy. Soc. A*, **137**, 229 (1932)

‡ K. T. Bainbridge and E. B. Jordan, *Phys. Rev.* **51**, 384 (1937) なお H. Bethe and M. S. Livingston, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 370 (1937) を見よ．

跡とエネルギーの関係により，α-粒子の運動エネルギーを測定することができる．最近行なわれた非常に精密な実験によれば† α-粒子の運動エネルギーの和から入射プロトンの運動エネルギーを差し引いた残りは，

$$E=17.28\pm0.03\ \mathrm{Mev}=(27.6\pm0.05)\times10^{-6}\ \mathrm{erg} \tag{101}$$

である．(100) と (101) の一致はすばらしいものである．リチウム核の質量の測定には，mc^2 で $\pm0.2\times10^{-6}$ の誤差が含まれているからこの不一致は測定の精度からみて可能な誤差より小さい．したがって Einstein の式 (74) は非常な精度で実験的に検証されたことになり，その誤差は 1% 以下である．

普通の化学反応の際に放出される熱量に対応する質量は測定できないほど小さいのに反し，原子 (核反応) 炉内に放出される熱量は非常に大きく，対応する質量は，グラムの桁である．ウラン核が 2 つの破片にわかれる核分裂では，放出されるエネルギー ΔE に対応する質量 $\Delta m=\Delta E/c^2$ は，ウラン核の質量の約 1000 分の 1 にあたる．したがってウラン 1 トン中に含まれる核が全部分裂すれば，放出される熱の質量は 1 kg の桁になるのである．

他方，近代物理学は，質量 m_0 の粒子がエネルギー $E_0=m_0c^2$ に相当することを示す (72) 式を証明することができた．このことは粒子が完全に消滅する過程が存在する場合にのみ，検証可能である（したがって現実的な意味をもつのである）. 1932 年‡，正に帯電した電子 (陽電子) が発見され，このような消滅過程が実際に存在することが明らかになった．Dirac の電子論§によれば，この過程で正，負の電子（陽電子と陰電子）が消滅するのである．2 つの粒子は同じ質量 m_0 を有するから，(72) によればこの過程で放出されるエネルギーは $2m_0c^2$ に等しいはずである．このエネルギーは電磁放射の形で放出される．この放射のエネルギーを測定すれば (72) が検証できる．この逆過程，すなわち電磁放射（光量子）が正，負の電子対に遷移する過程も起りうる．この過程を起すには，個々の過程に参加する光子は，$2m_0c^2$ のエネルギーを必要とする§§.

以上を綜合すれば，相対性力学からえられた結論はすべて測定結果と一致す

† N. M. Smith, Jr., *Phys. Rev.* **56**, 548 (1939)

‡ C. D. Anderson, *Science*, **76**, 238 (1932): *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933); P. M. S. Blackett and G. P. S. Occhialini, *Proc. Roy. Soc.* **A**, **139**, 699 (1933)

§ P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 3rd ed., Oxford, 1947, § 73.

§§ C. D. Anderson and S. H. Neddermeyer, *Phys. Rev.* **43**, 1034 (1933) なお F. Rasetti, L. Meitner and K. Philipp, *Naturw*, **21**, 286 (1933); J. Curie and F. Joliot. *C. R.* **196**, 1581 (1933) を見よ．

ると云うことができる．しかし，これに対して次のような反論も起るかも知れない．すなわち，これらの測定は，みな原子関係の粒子である，電子とか核とかについてなされたもので，作用量子の存在に鑑み，これらは古典力学で取り扱うことはできないではないかと．しかし古典力学は元来量子力学の特別の場合であるから，上に述べたような実験はそのままエネルギーと質量の同等性の定理のような結論が古典力学の領域を超えて成り立っていることを示しているのである．事実 §30 で与えたこの定理の一般的証明で，Σ_2 なる系は全く一般的な物理系で，その構成についてはなんら特殊な仮定を行っていなかった．さらに，巨視的な電磁界による電子の偏向の実験では，量子力学が古典力学に移ってしまうような場合だけが問題になっているので，これらの実験はそのまま古典相対論的質点力学の基礎方程式の直接証明と見なしうるのである．

第 IV 章

相対性理論の4次元的定式化：テンソル算法

33. Lorentz 変換の4次元的表現

特定の慣性系 S 内では，任意の事象は4つの時空座標 (x, y, z, t) で特徴づけられる．他の慣性系 S' ではその**同じ**事象は他の4つの時空座標 (x', y', z', t') で特徴づけられる．$t=t'=0$ で2つの系 S, S' の直交座標軸の原点が一致していたとすれば，これらの時空座標間の関係は，斉次 Lorentz 変換，すなわち (II. 13) の s^2 なる量

$$s^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=s'^2 \tag{1}$$

を不変にする斉1次変換で与えられる．次に

$$\left.\begin{array}{llll} x_1=x, & x_2=y, & x_3=z, & x_4=ict \\ x_1'=x', & x_2'=y', & x_3'=z', & x_4'=ict' \end{array}\right\} \tag{2}$$

とおけば，($i=\sqrt{(-1)}$ は虚数単位)，斉次 Lorentz 変換は斉1次変換

$$x_i'=\sum_{k=1}^{4}\alpha_{ik}x_k \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{3}$$

で表わすことができる．ただし，このさい

$$s^2=\sum_i x_i^2=\sum_i x_i'^2 \tag{4}$$

という条件はみたされていなければならぬ．ここで係数 α_{ij} は S と S' における空間軸の間の角と両慣性系間の相対速度によってきまる．どの座標系でも座標 x_1, x_2, x_3 は実数，x_4 は純虚数であるから，

$$\begin{array}{l} \alpha_{\iota\kappa} \text{ および } \alpha_{44} \text{ は実数,} \\ \alpha_{\iota 4} \text{ および } \alpha_{4\kappa} \text{ は純虚数} \end{array} \tag{5}$$

である．ただし ι, κ は 1, 2, 3 のどれかをとるものとする．

変数 (x_i) と (x_i') が全部実数であれば，これらは4次元 Euclid 空間中の1点の直交座標と考えることができる．その場合，変換 (3) はこの空間における直交座標系の回転を表わすことになる．というのは，原点 (0, 0, 0, 0) と点 (x_i) の間の距離 (4) は回転によって変らないからである．

さて x_4 や x_4' が実数でないような場合にも，その点の座標が (x_i) で**定義される**ような4次元空間を導入しても不自然ではない．物理空間における出来事はどのような時空座標系においても4つの数の組で特徴づけられるから，どの

出来事でもこの抽象的な4次元空間内の1点として表わすことができる．この空間は，Poincare† と Minkowski‡ がはじめて導入したもので，時空の連続体，または単に4次元空間，または (3+1)-空間とよぶ．ただし，この4つの次元が全く同等でないことに注意しておく．このように，斉次 Lorentz 変換は (3+1)-空間における座標系の廻転と解することができる．不変量 (4) を事象の起った点 (x_i) と原点 (0, 0, 0, 0) の4次元的**距離**の自乗と呼ぶのは自然なことである．この空間と Euclid 空間との形式的な類似のため，この (3+1)-空間についても普通の幾何学上の考え方を用いることができる．この空間の幾何学を擬 Euclid 幾何学という．Euclid 幾何とのちがいは，すべての (x_i) が零でないのに距離 (4) が零になれるということに由来する．原点からの距離が零であるような点は方程式

$$s^2=\sum_i x_i^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \tag{6}$$

で与えられるような曲面を形成する．(6) は時刻 $t=0$ に原点

$$x=y=z=0$$

を出発した球面光波の伝播を記述するので，この面を光円錐 (light cone) という．光円錐により，(3+1)-空間は座標変換に無関係な方法で2つの領域 a, b に区分され，各領域はそれぞれ不等式

$$s^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2<0 \tag{7a}$$

$$s^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2>0 \tag{7b}$$

で指定される．(7b) で指定される領域に起った 2 つの事象に対しては，1 回の Lorentz 変換で $t'=0$ であるような系 S' を導入することができる．すなわち S' では事象 $(x_i)=(x, y, z, t)$ と事象 (0, 0, 0, 0) が同時であるようにすることができるが，(7a) で指定されるような領域で起った 2 つの事象については，このようなことはできない．

質点の運動はすべて

$$x_\iota=x_\iota(x_4) \qquad (\iota=1, 2, 3) \tag{8}$$

という形の方程式で記述される．ここで $x_\iota(x_4)$ は時間変数 x_4 の特定の函数である．この式は $(x+1)$ 空間内の一つの曲線を表わす．この曲線をその粒子の世界線 (時間的軌道) と呼ぶことにしよう．運動が一様なときは函数 $x_\iota(x_4)$ は1次函数で，その世界線は1つの直線になる．この直線が原点を通過するならば，この直線全体が領域 (7a) 内に含まれなければならぬ．それは粒子の速度

---

† H. Poincaré, *Rend. Pal.* **21**, 129 (1906)

‡ H. Minkowski, 'Raum und Zeit', *Phys. Zs.* **10**, 104 (1909)

がつねに光速度より小さいからである．このような場合には新たに 1 つの座標系 S' を導入し，その x'_4 軸がその粒子の世界線に一致するようにすることができる．このことは，普通の物理空間 (3-空間) では，その粒子と共に運動をするような慣性系を導入することが常に可能なことを意味している．

さて，S 内で座標がそれぞれ (x_i) および $(\bar{x}_i)$ であるような任意の 2 つの事象を考えよう．他の座標系 S' に移れば，この 2 組の座標は，同じように変換される．すなわち，それぞれ (3) の形の式で変換されるが，それらの係数 α_{ik} は共通である．このことは，これら両座標の差 $(x_i-\bar{x}_i)$ も同じ式によって変換され，したがって

$$\sum_i (x_i-\bar{x}_i)^2=\sum_i (x'_i-\bar{x}'_i)^2 \tag{9}$$

が不変量でなければならないことを意味する．(9) という量は，事象点 (x_i) および $(\bar{x}_i)$ 間の 4 次元的な距離の自乗を表わしている．$\sum_i x_i^2$ および $\sum_i \bar{x}_i^2$ は，それぞれ不変量であるから，(9) 式から直ちに

$$\sum_i x_i\bar{x}_i=\sum_i x'_i\bar{x}'_i \tag{10}$$

も，また不変量であることがわかる．

(10) の右辺の x'_i と $\bar{x}'_i$ に表式 (3) を代入すれば

$$\sum_i\Big(\sum_l \alpha_{il}x_l\Big)\Big(\sum_m \alpha_{im}\bar{x}_m\Big)=\sum_{l,m}\Big(\sum_i \alpha_{il}\alpha_{im}\Big)x_l\bar{x}_m$$

をえるが，(10) 式によれば，変数 (x_l) と $(\bar{x}_m)$ が各々独立に勝手な値をとっても，この式は $\sum_l x_l\bar{x}_l$ に等しくなければならない．そしてこのことが可能なのは，変換係数が次の関係を満足する場合に限る．

$$\sum_i \alpha_{il}\alpha_{im}=\delta_{lm}. \tag{11}$$

ただし

$$\delta_{lm}=\begin{cases}0, & l\neq m \text{ のとき}\\ 1, & l=m \text{ のとき}\end{cases} \tag{12}$$

はよく知られている Kronecker の記号である．

(3) の逆関係は簡単で

$$x_k=\sum_i x'_i\alpha_{ik} \tag{13}$$

である．なぜならば (13) 式の右辺に現われた量に (3) 式を代入し (11) という関係を用いれば (13) 式の左辺がえられるからである．すなわち

$$\sum_i x'_i\alpha_{ik}=\sum_{i,l}\alpha_{il}x_l\alpha_{ik}=\sum_l x_l\Big(\sum_i \alpha_{il}\alpha_{ik}\Big)=\sum_l x_l\delta_{lk}=x_k.$$

(13) 式を (10) の左辺に代入し，(11) を導き出したのと同じ論法を用いれば

$$\sum_i \alpha_{li}\alpha_{mi}=\delta_{lm} \tag{14}$$

がえられる．係数 α_{ik} に対する条件 (11) と (14) は，直交関係と呼ばれるもので，これは単に，斉次 Lorentz 変換が (3+1)-空間における座標系の“回転”を表わすものであるということを云い表わしたものにすぎない．

係数 α_{ik} の表を，そのまま行列式としたもの

$$\alpha=|\alpha_{ik}|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} \tag{15}$$

については，行列式の乗法と (14) を用いて

$$\alpha^2=|\alpha_{ik}|^2=|\sum_l \alpha_{il}\alpha_{kl}|=|\delta_{ik}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

すなわち

$$\alpha=\pm 1 \tag{15'}$$

が成立する．回転というものは連続的に行うことができ，また恒等変換 $x=x_i$ の変換係数の表の行列式は 1 であるから，本義の回転の場合の α は $+1$ でなければならない．これに対して α が -1 という値をとるのは，1つの軸または 3 つの軸の向きを変える反転の場合である．

特殊 Lorentz 変換 (II. 24) の係数 (α_{ik}) は，次の表で与えられる．

$$\alpha_{ik}=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & iv\gamma/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iv\gamma/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{16}$$

ここで $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ である．(16) が直交関係 (11) および (14) を満足し，$\alpha=+1$ であること検証するのは容易である．

この特殊 Lorentz 変換は

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\psi+x_4\sin\psi \\ x_4' &= -x_1\sin\psi+x_4\cos\psi \\ x_2' &= x_2, \qquad x_3'=x_3 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

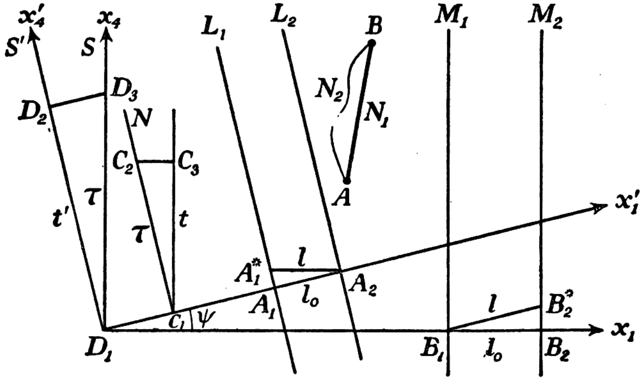
の形に書くことができる．ここで

$$\cos\psi=\gamma,\qquad \sin\psi=iv\gamma/c,\qquad \tan\psi=\frac{iv}{c} \tag{18}$$

とおいた. (17) は形式的に (x_1, x_4) 面内での回転を表わす. しかし, その '回転角' は純虚数である.

34. Lorentz 短縮および動いている時計のおくれの4次元的な表わし方

慣性系 S 内の x-軸上で起った事象は (3+1)-空間内の (x_1x_4)-面上の1点で表わされる. 第12図は, 時間変数 x_4, x_4' や角 ψ があたかも実数であるかの



第 12 図

ように考えて描いたもので, Lorentz 短縮や, 時計のおくれの図解である. L_1, L_2 なる2本の線は x_4'-軸に平行で, x'-軸上に静止する物指の両端の世界線を表わす. その物指が静止している時の長さは $l_0=x'_{A_2}-x'_{A_1}$ であるとする.

そのとき, S に対する棒の長さ l は, S 系内で同時の (したがって x_4 の値を同じくする) 2つの事象点 A_2 と A_1^* の x-座標の差に等しい. すなわち

$$l=x_{A_2}-x_{A_1^*}.$$

この場合にも Euclid 幾何学における諸関係は形式的に成り立つから, 図から

$$l=l_0\sec\psi=l_0(1-v^2/c^2)^{1/2} \tag{19}$$

がえられる. ただしここで (18) を用いている.

(19) は Lorentz 短縮の式である. 同様に S 系の x-軸上に静止している物指の両端点の世界線は x_4-軸に平行な直線 M_1, M_2 で表わされる. この上に作った三角形 $B_1B_2B_2^*$ について考えても (19) 式がえられる.

同様にして, 時計のおくれに対する幾何的な図解をすることができる. S'

系で静止している時計を考えるとその世界線は x_4'-軸に平行な直線である．そしてその固有時 τ は，この直線の長さである．この直線を N とし，この直線上固有時 τ に対応する部分を C_1, C_2 とする．これに相当する S 系での時間は，C_1C_2 を x_4-軸に射影すればえられる．このとき，三角形 $C_1C_2C_3$ に着目すればただちに，

$$t=\tau\cos\psi=\tau\gamma \tag{20}$$

をえる．これは時計のおくれの式 (II. 36) に一致する．

一方，S 系内に静止している時計を考えることにすれば，三角形 $D_1D_2D_3$ についての考察から S' 系の時関 t' と固有時 τ の間の関係としてふたたび (20) 式がえられる．

この図解によれば，Lorentz 短縮や時計のおくれは物指や時間間隔の見る向きによる透視的な縮みの一種のように見える．しかし，このような表わし方は全く形式的なものであることを忘れてはならない．このことは，‘射影の角’ψ が虚数であるということでも明らかである．総じて，4 次元的表現が認識論的に意味深長なものであると強調すべきではない．相対性理論では，空間と時間の記述が形式的に対称的に行われているけれども，空間変数と時間変数の間には，物理的に根本的な相違があるのである．このちがいは，これらの変数を物理的に定義するのに要する測定装置，時計と物指，のちがいと密接な関係がある．したがって，条件 (5) を満足するどのような許された‘回転’(3) によっても，時間軸を空間軸に変換することは不可能である．物理的に意味があるのは x_4-軸が領域 (7a) より外へ出さないような回転，すなわち x_4-軸が光円錐 (60) 内に留るような回転だけである．

35. 4 次元的定式化における自然法則の共変性

4 次元的な表現は，全く形式的なものであるにも拘らず，相対性理論の発展の上で非常に大きな意義をもっていたのである．そのわけは，この 4 次元的表現を用いると，Lorentz 変換に対する自然法則の共変性が非常に簡単な形式で表わすことができたからであった．自然法則は，一般に物理量の間のある関係を表わすものである．これらの量は，それを測定するのに用いられた操作によって定義される．ある慣性系 S 内の物理学者が測った物理量の一組を A, B, …… とする．これらの量 A, B, …… 中のあるものは，S 系内の時空座標 (x_i) の函数である，いわゆる場の量であってもよい．こうして，一般に自然法則は

$$F\left(A, B, \cdots\cdots, \frac{\partial A}{\partial x_i}, \frac{\partial B}{\partial x_k}, \cdots\cdots\right)=0, \tag{21}$$

なる形の方程式または数個の連立方程式で表わされる. ここで, F は $A, B, \cdots\cdots$ およびその時空座標に関するいろいろな階数の導函数の函数である.

他の慣性系 S' の物理学者が上述の物理量を同じ方法で測定すれば, 一般にはちがった値 $A', B', \cdots\cdots$ がえられるであろう. 例えば A が場の変数なら A' は座標 (x_i') の函数であるが, (x_i) の函数としての A とは, 一般にちがう函数である. このように場の量は一般に時空座標の函数としてその形が不変でない.

ところが, S 系で, (21) で表わされるような物理法則は, S' 系では

$$F\left(A', B', \cdots\cdots, \frac{\partial A'}{\partial x_i'}, \frac{\partial B'}{\partial x_k'}, \cdots\cdots\right)=0, \tag{21'}$$

なる形の方程式で表わされる. 特殊相対性原理によれば, (21′) の F は変数 $(A', B', \cdots\cdots)$ の函数としては, (21) における $(A', B', \cdots\cdots)$ の函数 F と**同じ**函数でなければならない. すなわち物理量間の関係は, 形が不変であるような, または共変であるような方程式で表わされねばならない.

電磁力学や弾性体の理論における基礎方程式を, その記述に用いた直交座標のとり方に無関係であるように表わそうという問題が起ったときに, 3 次元のベクトルやテンソル解析が発見された. Lorentz 変換は (3+1)-空間における回転を表わすものだから, この変換に対して自然法則が共変的であるべしという要求を満たすように 3 次元のベクトルやテンソルを 4 次元に拡張し, 基礎方程式を 4 次元テンソルの方程式の形に書くことを試みるのは当然なことである.

次の章で述べるように, 巨視的な古典物理学の基礎方程式については, このことは全面的に可能であった. そして, 一時, 自然法則は**すべて**, テンソルの形で書けるものと信じられていたことがあった. ところが, Dirac の量子力学的電子論が現われて, はじめて, ある種の物理学的な系に対しては, テンソル以外の量, いわゆるスピノル†を用いなければならぬことが明らかになった. スピノルはテンソルと全く異なる変換性を有するにも拘らず, (21), (21′) の型の共変的な微分方程式を満足するのである.

36. 4 次元の線素または interval. 4 元ベクトル

(3+1) 空間で, 任意の座標系 S についての座標がそれぞれ (x_i) および (x_i+dx_i) であるような相隣る 2 点 P, P' を考える. これら 2 点間の 4 次元的

† P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (3 rd ed., Oxford 1947), chap. xi.

な距離の自乗は (3) 式によって

$$ds^2=\sum_i dx_i^2 \tag{22}$$

で与えられる．この**線素**あるいは **interval** の式が (3+1) 空間の幾何学をきめてしまうのである．3 次元の場合と同様に，P と P' を結ぶ無限小線分がベクトルの原型である．このベクトルは任意の座標系に対する 4 次元‘成分’(dx_i) によって定義される．座標軸を回転して S' 系に移るとき，これらの成分は座標と同じ変換をうける．すなわち，

$$dx_i'=\sum_k \alpha_{ik}dx_k, \tag{23}$$

さて，**もっと一般に各座標系に対して座標 (x_i) と同じ変換をする 4 つの成分 (a_i) を有する量を 4 元ベクトルと定義する**．したがって座標系の回転 (3), (13) に，4 元ベクトルの成分の変換式

$$a_i'=\sum_k \alpha_{ik}a_k, \qquad a_k=\sum_i a_i'\alpha_{ik} \tag{24}$$

が対応する．

このとき，(4) と全く同様に，(11) と (14) から，**‘4 元ベクトルの大きさの自乗’**すなわちこのベクトルの**ノルム**，

$$\sum_i a_i^2=\sum_i a_i'^2 \tag{25}$$

は不変である．

不変量 (25) が零より小さいか，零に等しいか，零より大きいかによって，そのベクトルをそれぞれ，**時間性** (time-like) ベクトル，**零**ベクトル，**空間性** (space-like) ベクトルという．

2 隣点 P, P' を結ぶ無限小ベクトル (dx_i) の場合には，(25) は (22) と同じになる．

$$ds^2=\sum_i dx_i^2=d\sigma^2-c^2dt^2. \tag{26}$$

ここで $d\sigma$ は 2 つの事象が起った物理空間における 2 つの空間点間の空間的距離であり，dt は 2 つの事象が起った時刻の差である．P を中心とする光円錐は $ds^2=0$ で定義される．P' が光円錐上にあるときは，この 2 つの事象は光の信号によって連絡することができる．P' がこの光円錐の内部にあれば，ベクトル (dx_i) は time-like であり，外部にあれば (dx_i) は space-like である．

成分が (a_i) および (b_i) なる 2 つの 4 元ベクトルから新たに (a_i+b_i) を成分とするベクトルを作ることができる．

さらに，このベクトルの大きさの 2 乗

$$\sum_i (a_i+b_i)^2 = \sum_i a_i^2 + \sum_i b_i^2 + 2\sum_i a_i b_i$$

が不変であることから，(10) の場合と全く同様に，

$$\sum_i a_i b_i = \sum_i a'_i b'_i \tag{27}$$

なる量も不変量であることが直ちにわかる．(27) を 2 つのベクトルの**スカラー積**という．スカラー積が零の場合，2 つのベクトルは互に直交するという．

4 元ベクトルのはじめの 3 つの成分は，空間回転の際に普通の空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ のように振舞う．したがって，任意の慣性系で，4 元ベクトルを空間部分と時間部分に分け

$$(a_i) = (\boldsymbol{a}, a_4) \tag{28}$$

と書くことができるが，この分け方は，いうまでもなく，Lorentz 変換に対して不変ではない．$(\boldsymbol{a}, a_4)$ なる量は

$$(\boldsymbol{x}, x_4) = (\boldsymbol{x}, ict)$$

と同様な変換をうけるから，回転を伴わない任意の Lorentz 変換に対して，(II. 25) から

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}' + \frac{\boldsymbol{v}}{v^2}\,\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}')\{1-(1-v^2/c^2)^{1/2}\} - iv^2 a'_4/c}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \\ a_4 &= \frac{a'_4 + i(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}')/c}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

がえられる．このベクトルが time-like，すなわち

$$\sum_i a_i^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - |a_4|^2 < 0 \tag{30a}$$

のときには，常に $\boldsymbol{a}'=0$ となるような座標系 S' を導入することが可能である．それには 4 元ベクトル (a_i) の方向を S' 系の時間軸に選べばよい．ところがこのベクトルが space-like のとき，すなわち

$$\sum a_i^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - |a_4|^2 > 0 \tag{30b}$$

のときは，$a'_4=0$ になるような S' 系を見つけだすことができる．このことは，S' 系の時間軸がベクトル (a_i) と直交することを意味している．なぜなれば，この新しい時間軸の方向のベクトルを (b_i)，ただし b'_ι は $\iota=1, 2, 3$ の場合に零，とすれば

$$a_i b_i = a'_i b'_i = 0$$

だからである．

37. 4 元速度と加速度．波数ベクトル．4 元光線速度

さてこんどは，1 個の質点の運動とその (3+1)-空間における世界線 (8) に

ついて考えることにしよう．この世界線を表わすのに，その長さ s をパラメーターとするパラメーター表現

$$x_i = x_i(s) \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{31}$$

を用いることができる．この曲線上の隣りあう 2 つの事象点は，無限小 4 元ベクトル (dx_i) で結ばれ，その長さ ds は (22) または (26) で与えられる．粒子の速度は常に光速 c より小さいから，ds^2 は曲線上どこでも負の値を有する．このために，s の代りに新しく

$$s = ic\tau \tag{32}$$

で定義される実数のパラメーター τ を導入するのが便利である．

(32) を (26) 式に用いれば

$$-c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 - c^2 dt^2 \tag{33}$$

がえられる．また粒子の速度 u は $\dfrac{d\sigma}{dt}$ に等しいから

$$d\tau = (1-u^2/c^2)^{1/2} dt \tag{34}$$

をえる．したがって τ は，この粒子の固有時，すなわち，その粒子と一しょに運動する標準時計で測定した時間にほかならない．そして質点の固有時はその世界線の長さを表わしている．

等速直線運動に対応する世界線は，例えば第 12 図の事象 A, B を結ぶ線 N_1 のような直線で表わされる．この線分の長さは

$$\frac{s_1}{ic} = \tau_1 = (t_B - t_A)\sqrt{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)} \tag{35}$$

で与えられる．ここで u_1 は，この等速運動の速度であり，$t_B - t_A$ は 2 つの事象 A, B 間の時刻の差である．同じ事象 A, B を結ぶ他の任意の世界線 N_2 を考えれば，これは明らかに 1 つの非等速運動を表わす．このような場合には，この曲線の長さは，(34) により

$$\frac{s_2}{ic} = \tau_2 = \int_{N_2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} dt \tag{36}$$

で与えられる．

(35) も (36) も任意の座標系内でも成り立つから，この計算を，例えば時間軸が真直な世界線 N_1 に平行であるような座標系内で行うことができる．つまり，等速運動する粒子と一緒に運動する慣性系を導入するのである．この系では $u_1 = 0$ であるが，N_2 で表わされるような不等速度運動の速度 u が世界線全体に亘って零になるようなことはありえない．したがって

$$\frac{s_2}{ic} < \frac{s_1}{ic} \tag{37}$$

でなければならない．このように，直線運動は，同一の 2 事象を結ぶ他のあらゆる可能な運動に比べて，世界線の長さが**停留値**，しかも**極大値**をとるような運動であるという特徴をもっている．

粒子の世界線上，座標の増分 (dx_i) は 4 元ベクトルの成分であり，$d\tau$ は不変量であるから，

$$U_i=\frac{dx_i}{d\tau} \tag{38}$$

は一つの 4 元ベクトルの成分である．これを **4 元速度**という．(38) と (34) から，U_i の成分は

$$U_i=\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{ic}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right), \tag{39}$$

であることがわかる．ただし

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \tag{40}$$

は普通の 3 次元速度ベクトルである．4 元速度は世界線の接線の方向を向いた 4 元ベクトルであり，その絶対値の自乗は，(39) により，

$$\sum_i U_i^2=\frac{u^2}{1-u^2/c^2}-\frac{c^2}{1-u^2/c^2}=-c^2 \tag{41}$$

という一定の値をとる．このように 4 元速度は，一定の長さを有する time-like ベクトルである．そして (41) を微分することにより

$$\sum_i U_i\frac{dU_i}{d\tau}=0 \tag{41'}$$

をえる．

(39) で与えられる 4 元ベクトル U_i に (29) 式を適用すれば，速度の変換式 (II. 55′) と (II. 56) の逆変換の式がえられる．

4 元ベクトル

$$A_i=\frac{dU_i}{d\tau}=\dot{U}_i=(1-u^2/c^2)^{-1/2}\frac{dU_i}{dt}$$

を 4 元加速度という．そしてその成分は (39) から

$$A_i=\left(\frac{c^2}{c^2-u^2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u}\frac{c^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})}{(c^2-u^2)^2},\ \frac{ic^3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})}{(c^2-u^2)^2}\right) \tag{42}$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$$

は，その粒子の普通の 3 次元加速度である．(41′) によれば，U_i と A_i は互に直交する．粒子の静止系 S' では A_i の成分は

$$A'_i=(\boldsymbol{a}',0) \tag{42'}$$

となる.

4元ベクトルのもう1つの例は，単色平面波の波数ベクトル (σ_i) である. (II.68) によれば，この波の不変な位相 F は任意の座標系で

$$\left.\begin{aligned} -F&=\sum_i\sigma_i x_i, \qquad \sigma_i=\left(\frac{\nu}{w}\boldsymbol{n},\ i\frac{\nu}{c}\right)=(\boldsymbol{\sigma},\sigma_4),\\ |\boldsymbol{\sigma}|&=\frac{\nu}{w}=\frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

と書ける. ここで $\boldsymbol{n}$ は波動法線の方向の3次元単位ベクトル，ν は振動数，w は位相速度，λ は波長を表わす. 位相が1つの不変量であるから，(3) により

$$\sum_k\sigma_k x_k=\sum_i\sigma'_i x'_i=\sum_{i,k}\sigma'_i\alpha_{ik}x_k.$$

である. この式は任意の x_k について成り立たねばならぬから次式をえる.

$$\sigma_k=\sum_i\sigma'_i\alpha_{ik}. \tag{44}$$

この式は (σ_i) が4元ベクトルであることを表わしている. (44) 式またはその (29) に相当する式から直ちに，すでに §23 で導いた平面波を特徴づける諸量の変換式 (70), (71) と (72) がえられる.

第 II 章 §24 で屈折率 $n>1$ なる媒質中での光線速度が，媒質の静止系内で速度が $u'=w'=c/n$ なる粒子の速度のように変換されることを知った. したがって (39) との類推により，4元光線速度ベクトル (U_i) を

$$U_i=\left\{\frac{u\boldsymbol{e}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{ic}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right\}, \tag{45}$$

で定義することができる. ここで u は光線速度の大きさ，$\boldsymbol{e}$ は光線方向の3次元単位ベクトルである.

屈折性媒質の静止系 S' 内では，$\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{n}'$, $w'=u'=c/n$ であるから

$$\sigma'_i=\left(\frac{\nu' n}{c}\boldsymbol{n}',\ i\frac{\nu'}{c}\right),\quad U'_i=\left\{\frac{c\boldsymbol{n}'}{\sqrt{(n^2-1)}},\ \frac{icn}{\sqrt{(n^2-1)}}\right\}. \tag{46}$$

である. したがって他の任意の慣性系では $U_k=\sum_k U'_i\alpha_{ik}$ をえる. (46) から

$$\sum_i\sigma_i U_i=\sum_i\sigma'_i U'_i=0, \tag{47}$$

をえる. すなわち，2つの4元ベクトル σ_i と U_i は互に直交する. (43) と (45) を (47) に代入すれば

$$\frac{\nu}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\left\{\frac{u}{w}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})-1\right\}=0$$

が，したがって

$$w=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}) \tag{47'}$$

がえられる．(47) は位相速度がどの慣性系においても光線速度の波動法線の方向の成分に等しいことを表わしている．

(U_i) の大きさの 2 乗は一定値 $-c^2$ に等しいが，

$$\sum_i \sigma_i^2=\nu^2\left(\frac{1}{w^2}-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{\nu'^2}{c^2}(n^2-1) \tag{48}$$

である．したがって，真空中の光波の波数ベクトルは零ベクトルである．

38. 4 元運動量．4 元力．質点力学の基礎方程式の 4 次元ベクトル形式

§28 の (32), (37) 式で，質点の運動量とエネルギー ($\boldsymbol{p}, E/c$) が時空座標 ($\boldsymbol{x}$, ct) と同じ方法で変換されることを知った．したがって 4 つの量

$$p_i=(\boldsymbol{p},\ iE/c) \tag{49}$$

は 4 元ベクトルの成分である．これを 4 元運動量と云う．(III. 23) と (III. 31) で (49) を書き直してみればわかるように 4 元運動量 p_i は，4 元速度 (39) に比例し，その比例定数は，粒子の静止質量 m_0 に等しい．すなわち，

$$p_i=m_0U_i \tag{50}$$

である．(50), (49), (41) によれば，このベクトルのノルムは

$$\sum_i p_i^2=p^2-\frac{E^2}{c^2}=m_0^2\sum_i U_i^2=-m_0^2c^2 \tag{51}$$

となり，(III. 35) 式と一致する．したがって 4 元運動量は time-like ベクトルである．

(50) で与えられる p_i，および (43) で与えられる σ_i は同じ変換をうけるので，4 元運動量が p_i であるような自由粒子に，相対論に不変な仕方で，波数ベクトルが σ_i であるような平面波を

$$p_i=h\sigma_i \tag{52}$$

によって随伴させることができる．ただし，h は不変な定数である．h として Planck 定数を選べば，この随伴する波は，その粒子の de Broglie 波†である．(43), (52) および (III. 36) によれば，de Broglie 波の位相速度 w と粒子の速度 u とは

$$\frac{1}{w}=\frac{i|\boldsymbol{\sigma}|}{c\sigma_4}=\frac{i|\boldsymbol{p}|}{cp_4}=\frac{p}{E}=\frac{u}{c^2} \tag{52'}$$

なる式で結ばれる．

---

† 第 II 章 54 頁に引用した論文を見よ．

また粒子間の衝突の際の運動量とエネルギーの保存の定理は，まとめて

$$p_i = \bar{p}_i \tag{53}$$

と書くことができる．ここで p_i および $\bar{p}_i$ はそれぞれ衝突前および衝突後における粒子の4元運動量ベクトルの和を表わす．このうち，はじめの3つの式 $(i=1,2,3)$ は運動量の保存則を表わし $i=4$ の場合の式がエネルギーの保存を表わしている．

(53) 式は，Lorentz 変換に対する共変性が一目で明らかな形で運動量およびエネルギーの保存の定理を表わしている．何となれば，ある座標系ですべての成分が相等しいような2つの4元ベクトルは，任意の座標系で同じ成分をもつことになることが明らかだからである．

§28 の終りに述べたように，$(\boldsymbol{F}_M, (\boldsymbol{F}_M\cdot\boldsymbol{u}))$ という量は $(\boldsymbol{p}, E)$ と同じ方法で変換される．すなわち，4つの量

$$F_i = \{\boldsymbol{F}_M,\ i(\boldsymbol{F}_M\cdot\boldsymbol{u})/c\} = \left\{\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right\} \tag{54}$$

は4元ベクトルの成分となる．これは Minkowski の力である．したがって，力学の基礎方程式 (III. 42) は，次のような共変的な4元ベクトルの形式に書くことができる．

$$\frac{dp_i}{d\tau} = F_i, \tag{55}$$

あるいは m_0 は時間に無関係な定数であるから，(55) は次のようにけ書る．

$$m_0\frac{dU_i}{d\tau} = F_i. \tag{56}$$

これらの式のうち，はじめの3つは運動方程式であり，第4番目の式はエネルギー保存の定理を表わしている．逆に，任意の慣性系で，(55) が成り立つことから F_i が4元ベクトルであることがいえる．何となれば，その場合 F_i は (55) の左辺と同じに変換されなければならず，しかも τ が不変量だから左辺が4元ベクトルであることが明らかだからである．

(41′) と (56) から2つのベクトル U_i と F_i が互に直交することがわかる．すなわち

$$\sum_i F_i U_i \equiv 0. \tag{57}$$

この F_i に関する性質は，静止質量が時間に無関係であることと密接に関係している．すなわち (55), (41), (41′) から

† H. Minkowski, 'Das Relativitätsprinzip', *Ann. d. Phys.* 47, 927 (1915)

$$\sum_i F_i U_i = \sum_i U_i \frac{d(m_0 U_i)}{d\tau} = \sum_i U_i^2 \frac{dm_0}{d\tau} + m_0 \sum_i U_i \frac{dU_i}{d\tau}$$
$$= -c^2 \frac{dm_0}{d\tau} \tag{58}$$

をえるから，(57) は固有質量 m_0 が保存されることを表わしている．

時として，外力が粒子の固有質量に変化を惹き起すような系に出会うことがある．例えば，電磁力の作用している電気の良導体等がそれである．そのわけは，その物体内に発生する Joule 熱が固有質量に寄与することにある．このような場合にも (55) がそのまま成り立つようにするには，F_i の式 (54) で $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=A$ を単位時間内の全効果でおきかえなければならぬ．すなわち F_1, F_2, F_3 の定義はそのままにしておいて，F_4 だけを

$$F_4 = \frac{i(A+Q)}{\sqrt{(c^2-u^2)}} \tag{59}$$

で定義しなければならぬ．ここで

$$A = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{60}$$

は，単位は間になされる力学的な仕事であるが，Q はその物体内に単位時間に放出される熱，または力学的以外のエネルギーの量である．(49), (59) および (34) により，(55) の 4 番目の方程式は

$$\frac{dE}{dt} = A + Q \tag{61}$$

と書くことができ，エネルギーの保存を表わすことになる．(55) 式はすべての慣性系で成り立つべきものであり，その左辺は 4 元ベクトルであるから，このように拡張された力もまた 4 元ベクトルでなければならない．しかし今度は (F_i) は (U_i) に直交しなくなる．そして

$$\sum_i F_i U_i = \frac{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})}{1-u^2/c^2} - \frac{A+Q}{1-u^2/c^2} = -\frac{Q}{1-u^2/c^2}. \tag{62}$$

となる．この式の左辺は不変量であるから，

$$\frac{Q}{1-u^2/c^2} = \frac{Q'}{1-u'^2/c^2} = Q^0 \tag{63}$$

も不変量でなければならぬ．これは単位時間当り静止系で放出される熱量である．

この種の物理系では，粒子の静止質量はもはや保存されない．(58), (62), (63) から

$$\frac{dm_0}{d\tau} = \frac{Q^0}{c^2} \tag{64}$$

がえられる，静止系では τ は時間に等しいから，(64) は静止系で放出された熱

量も Einstein の関係 (III. 74) で示される慣性質量を有することを示している.

このように, (55) 式は全く一般的に成り立つが, (56) は静止質量が保存される場合, すなわち $\Sigma F_i U_i = 0$ なる場合にだけ成り立つ.

また (55) は

$$m_0 \frac{dU_i}{d\tau} + \frac{dm_0}{d\tau} U_i = F_i,$$

あるいは (58) により

$$m_0 \frac{dU_i}{d\tau} = F_i + \frac{\Sigma F_k U_k}{c^2} U_i \tag{55'}$$

と書くことができる. したがって, $\Sigma F_i U_i \neq 0$ なる場合, すなわち**固有質量が保存されない場合には, 粒子を等速度運動をさせるために一般に力を必要とする**. なぜならば

$$F_i = -\frac{\Sigma(F_k U_k)}{c^2} U_i = \frac{Q^0}{c^2} U_i \tag{65}$$

である場合にだけ $dU_i/d\tau = 0$ だからである. 静止系では, この式は $\boldsymbol{F}^0 = 0$ となるが, それ以外の慣性系では

$$\boldsymbol{F} = \frac{Q^0}{c^2} \boldsymbol{u} \neq 0$$

となる.

また同時に (63) から, この種の過程である系に運び込まれる熱量 Q の変換性がえられる. (63) に $\Delta\tau\sqrt{(1-u^2/c^2)}$ を掛け, (34) を用いれば

$$Q\Delta t = Q^0 \Delta\tau \sqrt{(1-u^2/c^2)}.$$

$\Delta Q = Q\Delta t$ は, 時間 Δt 間にその系に運び込まれる総熱量であり, $\Delta Q^0 = Q^0 \Delta\tau$ はそれの静止系で測った値である. したがって

$$\Delta Q = \Delta Q^0 \sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \tag{66}$$

をうる. この (66) 式はある熱力学的過程において系に運び込まれる任意の分量の熱についても成り立つことを後に第 VII 章で述べるであろう.

39. 2 階のテンソル

前の数章において, 力学の基礎方程式を 4 元ベクトルを用いた形式で書けば, 基礎方程式が Lorentz 変換によって共変的に変換されることをまことにエレガントに示すことができることがわかった. 電磁力学を力学と同様に幾何学的に表示しようとすると, やはり 4 元テンソルを導入することが必要になる.

それぞれの座標系に応じてきまる 4^2 個の成分をもち，その成分が次に述べる変換規則によって変換する量を (3+1)-空間の 2 階のテンソルという．すなわち任意の座標系 S における成分を t_{ik} とするとき，他の任意の座標系 S' における成分 t'_{ik} は，変換式

$$t'_{ik}=\sum_{l,m}\alpha_{il}\alpha_{km}t_{lm}=\alpha_{il}\alpha_{km}t_{lm},\qquad t_{ik}=t'_{lm}\alpha_{li}\alpha_{mk},\tag{67}$$

によって t_{ik} と結ばれる．ここに α_{ik} は変換式 (3) と全く同じ係数で，座標系 S から S' への移行を規定する係数である．

簡単化のために，上式において加法記号を省略した．そして (67) 式内の l とか m のように，同じラテン字の指標が 2 つ対になって現われるときは，加法記号がなくてもこれらの指標について 1 から 4 まで加え合わせると約束する．単に (67) 式における i とか k のような単独の指標は，それぞれ独立に 1, 2, 3, 4 の値をとるとする．例えば式 (25) は以後は $a_ia_i=a'_ia'_i$ と書くことにする．さらに指標が 1, 2, 3 をとるが，4 を含まないときは，指標をギリシャ文字で書き，それが式の中で 2 つ対になって現われるときは，この指標について 1 から 3 まで加え合わせるものとする．この記号によれば空間ベクトル（4 元ベクトルの空間部分）の大きさの自乗は

$$|\boldsymbol{a}|^2=a_\iota a_\iota$$

のように書くことになる．

4 元テンソルの定義 (67) は，通常の 3 次元空間のテンソルをそのまま拡張したものである．3 次元テンソルの成分は物理空間内における座標系の回転において，変換式

$$t'_{\iota\kappa}=\alpha_{\iota\lambda}\alpha_{\kappa\mu}t_{\lambda\mu}\tag{68}$$

によって変換する．ここに $\alpha_{\iota\kappa}$ は回転を表わす直交変換の係数である．

(67) 式に (11) 式の関係を用いれば，

$$t'_{ii}=(\alpha_{il}\alpha_{im})t_{lm}=\delta_{lm}t_{lm}=t_{ll}\tag{69}$$

となるから，2 階のテンソルの対角要素の和は不変量である．

直交条件 (11) 式，および (14) 式を用いて上と同じように計算すれば

$$t_{ik}t_{ik}=t'_{lm}t'_{lm}\tag{70}$$

も不変量であることがわかる．

α_{ik} が 3 次元物理空間における座標系の回転を表わす場合には，

$$\alpha_{\iota 4}=\alpha_{4\kappa}=0,\qquad \alpha_{44}=1,\tag{71}$$

となり，(67) 式は

$$\left.\begin{array}{ll} t'_{\iota\kappa}=\alpha_{\iota\lambda}\alpha_{\kappa\mu}t_{\lambda\mu}, & t'_{\iota4}=\alpha_{\iota\lambda}t_{\lambda4} \\ t'_{4\kappa}=\alpha_{\kappa\mu}t_{4\mu}, & t'_{44}=t_{44} \end{array}\right\} \tag{72}$$

となる．

(72) 式を見れば，4元テンソルの空間部分の空間座標軸の回転による変換性は，通常の3次元テンソルと同じであることがわかる．さらにこの空間座標軸のみの回転に対して，成分 $t_{\iota4}$ と $t_{4\kappa}$ は，それぞれが空間ベクトルの成分になっており，これに対して t_{44} は不変量になっている．

1つのベクトルと1つのテンソルから，次のようにして新しくベクトルをつくることができる．すなわち任意の座標系におけるベクトルとテンソルの成分をそれぞれ，a_i, t_{ik} とし，

$$b_i=t_{ik}a_k \tag{73}$$

で b_i を定義する．(24), (67), (11) 式を用いれば

$$\begin{aligned} b'_i=t'_{ik}a'_k&=\alpha_{il}\alpha_{km}t_{lm}\alpha_{kn}a_n \\ &=\alpha_{il}(\alpha_{km}\alpha_{kn})t_{lm}a_n=\alpha_{il}\delta_{mn}t_{lm}a_n=\alpha_{il}(t_{lm}a_m) \\ &=\alpha_{il}b_l \end{aligned} \tag{74}$$

となるから，b_i を成分とする量はベクトルである．

成分がそれぞれ a_{ik}, b_{ik} の2つのテンソルがあるとき，$a_{ik}+b_{ik}$ を成分とする量は明らかにやはりテンソルで，これを **2つのテンソルの和**と呼ぶ．また t_{ik} がテンソルならば，$\check{t}_{ik}=t_{ki}$ もテンソルで，これを転置テンソルという．a_i, b_i を2つのベクトルの成分とすれば，それらは (24) 式に従って変換されるから，

$$t_{ik}=a_ib_k \tag{75}$$

が (67) 式に従って変換されることは明らかである．(75) 式によって定義された2階のテンソルをベクトル a_i と b_i の**直積** (direct product) という．また

$$t_{ik}=a_ib_k-a_kb_i=-t_{ki} \tag{76}$$

は (75) 式のテンソルとその転置テンソルとの差であるから，やはりテンソルである．(76) 式で定義されるテンソルのように，あらゆる指標 i, k に対して

$$t_{ik}=-t_{ki}=-\check{t}_{ik} \tag{77}$$

を満たすようなテンソルを反対称テンソルという．これに対して

$$t_{ik}=t_{ki}=\check{t}_{ik} \tag{78}$$

を満たすテンソルを対称テンソルという．

(77) 式と (78) 式の左右両辺はテンソル型の変換をするから，これらの式がある座標系において成立するならば，他のあらゆる座標系においても成立しな

ければならぬ．したがってテンソルの対称性と反対性とは座標変換によって変らない性質である．(77) 式において $i=k$ とおけば（ただし，あらゆる i に対する加法は行わない)，任意の i に対して

$$t_{ii}=-t_{ii}=0 \tag{79}$$

となるから，反対称テンソルの対角要素はすべて零である．

2 階反対称 4 元テンソル $F_{ik}=-F_{ki}$ の独立な成分は 6 個である．

$$H_{\iota\kappa}=F_{\iota\kappa}, \quad E_\iota=iF_{\iota4}=-iF_{4\iota} \tag{80}$$

とおけば，$H_{\iota\kappa}$ と E_ι は空間座標軸の回転のさいは (71) および (72) 式によって，それぞれ反対称空間部テンソルの成分と通常の空間ベクトル $\boldsymbol{E}$ の成分と同じ変換を受ける．さらに，

$$H_1=H_{23}, \quad H_2=H_{31}, \quad H_3=H_{12} \tag{80'}$$

とおけば，特殊 Lorentz 変換 (16) による H_ι および E_ι の変換式は次式で与えられる．

$$\left.\begin{array}{lll} H'_1=H_1, & H'_2=\gamma(H_2+vE_3/c), & H'_3=\gamma(H_3-vE_2/c) \\ E'_1=E_1, & E'_2=\gamma(E_2-vE_3/c), & E'_3=\gamma(E_3+vH_2/c), \end{array}\right\} \tag{81}$$

ただし　$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$.

(81) に対する逆変換式は，この式中の ′ を附した量と，附さない量を入れかえ，さらに v の代りに $-v$ を入れかえたものである．(81) の逆変換式は，$\boldsymbol{v}=(v,0,0)$ を用いれば，次のベクトル形式にまとめることができる．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}&=\gamma\boldsymbol{E}'+\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}')(1-\gamma)-\frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}') \\ \boldsymbol{H}&=\gamma\boldsymbol{H}'+\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H}')(1-\gamma)+\frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}'), \end{aligned}\right\} \tag{81'}$$

この形は空間軸の回転を伴わなければどの Lorentz 変換にでもあてはまる．

40. 角運動量と力のモーメントの 4 次元的な表わし方

$(x_i)=(\boldsymbol{x}, ict)$ を質点の世界線上の 1 点の時空座標，$(p_i)=\{\boldsymbol{p}, i(E/c)\}$ を質点の 4 元運動量とする．この 2 つの 4 元ベクトルから (76) によって反対称テンソル

$$M_{ik}=x_ip_k-x_kp_i \tag{82}$$

をつくる．このテンソルの空間部分は，反対称の空間テンソルである角運動量テンソル $M_{\iota\kappa}$ である．この成分は角運動量ベクトル

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p} \tag{83}$$

との間に次の関係がある．

$$\boldsymbol{M}=(M_x, M_y, M_z)=(M_{23}, M_{31}, M_{12}). \tag{84}$$

(x_i) と Minkowski の4元力 (F_i) からテンソル

$$D_{ik}=x_iF_k-x_kF_i \tag{85}$$

をつくる．この空間部分は，(83)，(84) 式と対比すれば，Minkowski の力 (III. 41) の原点に関するモーメントになっていることがわかる．

(38) 式を用いれば，力学の基礎方程式 (55) から

$$\frac{dM_{ik}}{d\tau}=U_ip_k+x_iF_k-U_kp_i-x_kF_i$$

が導かれ，さらに (50) と (85) を用いれば

$$\frac{dM_{ik}}{d\tau}=D_{ik} \tag{86}$$

となる．この方程式の空間部分は角運動量に関する定理

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}) \tag{86'}$$

になっている．

S 系における成分が δ_{ik} に等しいテンソルを考える．このテンソルの S' 系における成分は (67) と (14) より

$$\delta'_{ik}=\alpha_{il}\alpha_{km}\delta_{lm}=\alpha_{il}\alpha_{kl}=\delta_{ik} \tag{87}$$

となる．このようにこのテンソルは，どの座標系においても同じ値の一定の成分をもっておる．またこのテンソルは座標系の変換によって成分が不変のまま残る唯1つのテンソルである．したがって (12) によって定義された Kronecker 記号は，どの座標系においても同じ一定の値をもち，座標系の変換に際して成分が不変に保たれる唯一のテンソルを表わしている．

41. 任意の階数のテンソル

(3+1) 空間の3階のテンソルは，(67) 式にならって，次の変換式 (88) によって変換する 4^3 個の成分 t_{ikl} からなる量として定義される．

$$t'_{ikl}=\alpha_{im}\alpha_{kn}\alpha_{lp}t_{mnp}, \qquad t_{ikl}=t'_{mnp}\alpha_{mi}\alpha_{nk}\alpha_{pl}. \tag{88}$$

このように指標の1つ1つは，それぞれ4元ベクトルと同じ変換法則に従って変換する．この意味で，**4元ベクトルは1階のテンソルといえる．また不変量は0階のテンソルである．**

n 個の独立の指標を持つ量 $t_{ikl}\cdots\cdots$ の各指標がおのおの別々に変換法則 (24) によって変換されるとき（この変換性はベクトルの特徴である），$t_{ikl}\cdots\cdots$ を n 階のテンソルという．n 階のテンソルの2つの指標，例えば k と i を等しくお

いて，それについて成分を加え合わせれば，$n-2$ 階のテンソル $t_{iilm}\cdots\cdots$ がえられる．これはテンソルの変換式に直交条件 (11) と (14) を適用すれば直ちに証明できる．このような過程によってn階のテンソルから $(n-2)$ 階のテンソルを作ることを**縮約** (contraction) という．式 (69) では，2階のテンソルから0階のテンソルがつくられているから，これは縮約の特別な場合になっている．

2つのn階のテンソルの相対応する成分を加える（あるいは減ずる）ことによって，当然新しいn階のテンソルができる．これに反して異なる階数の2テンソルを加えたものは，変換に対して共変的な意味をもたない．他方，n階のテンソルとm階のテンソルの成分のあらゆる可能な積を成分とする量は常に作ることができ，これを2つのテンソルの**直積** (direct product) というが，これは $(n+m)$ 階のテンソルになっている．式 (75) の2階のテンソル $t_{ik}=a_ib_k$ は1階のテンソル a_i と b_k の直積であるから，式 (75) は，この定理の一例になっている．このテンソル a_ib_k に縮約を施せば0階のテンソル，すなわち不変量 (27) をえる．

直積と縮約との2つの操作の組み合わせ操作の例が式 (73) である．すなわち先ず2つのテンソル t_{ik} と a_l の直積によって3階のテンソル $(t_{ik}\cdot a_l)$ をつくり，次にこれに縮約を施せば1階のテンソル $b_i=t_{ik}a_k$ ができる．この見地で見れば，式 (70) は，t_{ik} が自分自身と直積をつくり，その結果に2回縮約を施したものに他ならない．

42. 擬テンソル

3次元のベクトル解析では，変換の法則が

$$a'_\iota=\alpha_{\iota\kappa}a_\kappa \tag{89}$$

で与えられるような普通の (極性) ベクトルのほかに，

$$a'_\iota=\alpha\alpha_{\iota\kappa}a_\kappa \tag{90}$$

で変換される，いわゆる軸性ベクトルを導入する．ただし $\alpha=|\alpha_{\iota\kappa}|$ は変換の行列式を表わす．本義の回転に対しては $\alpha=1$ であるからこの場合軸性ベクトルは極性ベクトルと同じに変換される．ところが，座標軸の1つ，または3つがその向きを逆向きに変えるような反転では $\alpha=-1$ であるから，例えば，

$$x'_i=-x_i \tag{91}$$

となるような，原点に対する反転に対して，極性ベクトルの成分はその符号が変るが，軸性ベクトルの成分の符号は変化しない．

軸性ベクトルの1例は，2つの極性ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のベクトル積 $\boldsymbol{c}$ であ

る．その成分は

$$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1) \tag{92}$$

である．反転によって $a_i'=-a_i$，$b_i'=-b_i$ となるから，$c_i'=c_i$ であることは明らかである．軸性ベクトルでもう1つよく知られている例は磁場のベクトル $\boldsymbol{H}$ である．

軸性ベクトルの概念を高い階数のテンソルや4次元の場合に拡張することについては説明を要しないであろう．これらの量を**擬テンソル**という．これらは普通のテンソルと同様に変換されるが，(15) で定義される変換の行列式 $\alpha=|\alpha_{ik}|$ がかかる点がちがう．例えば第2階擬テンソルは，どの座標系でも 4^2 個の成分を有し，変換の法則

$$t'_{ik}=\alpha\alpha_{il}\alpha_{km}t_{lm} \tag{93}$$

に従う量である．この定義から直ちに次のような規則がえられる．すなわち階数の同じ2つの擬テンソルの和は，同じ階数の擬テンソルである．また，擬テンソルとテンソルの直積は，両テンソルの階数の和を階数とする擬テンソルであり，2つの擬テンソルの直積は普通のテンソルである．擬テンソルの場合にも，普通のテンソルの場合と同じ方法で縮約という操作を行うことができる．そして，これによって階数が2だけ少い擬テンソルがえられる．

43. Levi-Civita 記号

Kronecker 記号が，どの座標系でもその成分が一定のテンソルであることは §40 で示した．Levi-Civita 記号は，その成分がやはりどの座標系でも一定の擬テンソルで，4次元空間では4階である．**4つの指標のすべてについて反対称である量 δ_{iklm} を4次元空間の Levi-Civita 記号と定義する**．したがって，**4つの指標のすべてが互に異なる成分のみが零でなく，その値は指標 (i, k, l, m) が $(1, 2, 3, 4)$ の偶置換のとき1に，奇置換のときに -1 になる**．いま，1つの擬テンソルの S 系における成分が δ_{iklm} であるときは，この擬テンソルの S' 系における成分 δ'_{iklm} は

$$\delta'_{iklm}=\alpha\alpha_{in}\alpha_{kp}\alpha_{lq}\alpha_{mr}\delta_{npqr} \tag{94}$$

となる．対称性に関する性質は変換のさい，そのまま保持されるから，δ'_{iklm} はやはりすべての指標について反対称である．このため成分の中の1つ，たとえば $(i, k, l, m)=(1, 2, 3, 4)$ について計算を行えばそれで十分である．

$$\delta'_{1234}=\alpha\alpha_{1n}\alpha_{2p}\alpha_{3q}\alpha_{4r}\delta_{npqr}. \tag{95}$$

δ_{iklm} の定義から

$$\alpha_{1n}\alpha_{2p}\alpha_{3q}\alpha_{4r}\delta_{npqr}=\alpha$$

となるから，(95) に (15′) を代入すれば

$$\delta'_{1234}=\alpha^2=1=\delta_{1234}$$

δ'_{iklm} と δ_{iklm} とは同じ対称性をもっているから，この結果から (i,k,l,m) のすべての値について

$$\delta'_{iklm}=\delta_{iklm} \tag{96}$$

が成立することになる．すなわち Levi-Civita 記号はどの座標系においても同じ一定の成分をもつ擬テンソルであることがわかる．

3 次元空間では Levi-Civita 記号は 3 つの指標全部について反対称の成分 $\delta_{\iota\kappa\lambda}$ をもつ量である．δ_{123} が 1 に等しく，他の零でない成分は対称性に関する規則を用いて δ_{123} から求められる．上述の方法と同じようにして，$\delta_{\iota\kappa\lambda}$ が 3 次元の擬テンソルであることも証明できる．

44. 対隅 (dual) テンソル

Levi-Civita 記号を用いて，3 次元反対称テンソル $H_{\iota\kappa}$ に 1 つの擬ベクトル (軸性ベクトル) $\boldsymbol{H}$ を

$$H_\iota=\frac{1}{2}\delta_{\iota\kappa\lambda}H_{\kappa\lambda}, \tag{97}$$

あるいは

$$\boldsymbol{H}=(H_1, H_2, H_3)=(H_{23}, H_{31}, H_{12}), \tag{98}$$

によって対応させることができる．したがって，(80′) で定義された量 H_ι はテンソル $H_{\iota\kappa}$ に対隅 (dual) な軸性ベクトルの成分である．

a_ι, b_κ を 2 つのベクトルとして，$H_{\iota\kappa}$ が

$$\sigma_{\iota\kappa}=a_\iota b_\kappa-a_\kappa b_\iota=\begin{vmatrix} a_\iota & b_\iota \\ a_\kappa & b_\kappa \end{vmatrix} \tag{99}$$

なる形の場合には，これに対応する軸性ベクトル

$$\sigma_\iota=\delta_{\iota\kappa\lambda}a_\kappa b_\lambda \tag{100}$$

は，ベクトル積 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ である．このテンソルあるいはそれに対隅な軸性ベクトルは，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で囲まれた平行四辺形を表わし，その成分は，この平行四辺形が 3 つの座標面に投ずる正射影に等しい．この平行四辺形の面積 σ は

$$\sigma^2=\sigma_\iota\sigma_\iota=\frac{1}{2}\sigma_{\iota\kappa}\sigma_{\iota\kappa} \tag{101}$$

で与えられる．擬ベクトル σ_ι はこの平行四辺形の面に垂直である．なぜなれば Levi-Civita 記号の反対称性により (100) 式から

$$\sigma_\iota a_\iota=a_\iota\delta_{\iota\kappa\lambda}a_\kappa b_\lambda=0 \quad および \quad \sigma_\iota b_\iota=0 \tag{102}$$

となるからである．同様にして，テンソル

$$H_{\iota\kappa}=\frac{\partial a_\kappa}{\partial x_\iota}-\frac{\partial a_\iota}{\partial x_\kappa}$$

に対偶なベクトルは，軸性ベクトル curl $\boldsymbol{a}$ である．

3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は1つの平行六面体を張る．(99) との類推で，これは1つの反対称テンソル

$$V_{\iota\kappa\lambda}=\begin{vmatrix} a_\iota & b_\iota & c_\iota \\ a_\kappa & b_\kappa & c_\kappa \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \end{vmatrix} \tag{103}$$

で表わされる．Levi-Civita 記号により，このテンソルに階数0のテンソル，すなわち擬不変量

$$V=\frac{1}{3!}\delta_{\iota\kappa\lambda}V_{\iota\kappa\lambda}=\delta_{\iota\kappa\lambda}a_\iota b_\kappa c_\lambda=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{104}$$

を対応させることができる．V はこの平行六面体の体積を表わす．これは本義の回転に対しては不変量であるが，反転に対してその符号が逆になる．また

$$V^2=\frac{1}{3!}V_{\iota\kappa\lambda}V_{\iota\kappa\lambda} \tag{105}$$

となることは明らかである．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ がそれぞれ x_1-, x_2-, x_3-軸の方向の無限小ベクトルの場合，すなわち

$$\boldsymbol{a}=(dx_1, 0, 0),\quad \boldsymbol{b}=(0, dx_2, 0),\quad \boldsymbol{c}=(0, 0, dx_3), \tag{106}$$

である場合には，対応する体積要素は (104), (106) により

$$dV=dx_1dx_2dx_3 \tag{107}$$

となる．これは擬不変量である．

(3+1)-空間の場合には，Levi-Civita 記号 δ_{iklm} により，n-階の反対称テンソル ($n\leqq 4$) に ($4-n$) 階の擬テンソルを対応させることができる．すなわち，反対称テンソル F_{ik} に対して，対偶な擬テンソル F^*_{ik} が

$$F^*_{ik}=\frac{1}{2i}\delta_{iklm}F_{lm}, \tag{108}$$

または

$$\left.\begin{aligned} F^*_{23}&=\frac{1}{i}F_{14},\quad F^*_{31}=\frac{1}{i}F_{24},\quad F^*_{12}=\frac{1}{i}F_{34} \\ F^*_{14}&=\frac{1}{i}F_{23},\quad F^*_{24}=\frac{1}{i}F_{31},\quad F^*_{34}=\frac{1}{i}F_{12} \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

によって定義される．(80) と (80′) で定義された量 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ を代入してみれはわかるように，F_{ik} からこれに対隅な擬テンソル F^*_{ik} をえるには $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{H}$ なる置き換えを行えばよい．このような置換を行っても，(81) と (81′) 式には変化が起らない．このことは，廻転を伴わない Lorentz 変換は $\alpha=1$ なる変換で，この場合 F^*_{ik} と F_{ik} は同じように変換されるという事実に対応するものである．

a_i, b_i を2つのベクトルとするとき，

$$\sigma_{ik}=a_ib_k-a_kb_i \tag{110}$$

なる特殊な形のテンソルは，ベクトル a_i, b_i により (99) との類推によって定義された2次元の‘平行四辺形’を表わす．その対隅テンソル

$$\sigma^*_{ik}=\frac{1}{i}\delta_{iklm}a_lb_m$$

はベクトル a_i, b_k およびテンソル σ_{ik} に直交する．すなわち，

$$\sigma^*_{ik}a_k=\sigma^*_{ik}b_k=\sigma^*_{ik}\sigma_{ik}=0 \tag{111}$$

である．(101) との類推で，この平行四辺形の面積 σ は，

$$\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{ik} \tag{112}$$

で定義される．

同様に，3階の反対称テンソルには，1階の対偶擬テンソル，すなわち，擬ベクトルが対応する．a_i, b_i, c_i を3つの独立なベクトルとして，特にこの3階のテンソルが

$$V_{ikl}=\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_k & b_k & c_k \\ a_l & b_l & c_l \end{vmatrix} \tag{113}$$

である場合には，その対隅ベクトルは

$$V_i=\frac{1}{i3!}\delta_{iklm}V_{klm}=\frac{1}{i}\delta_{iklm}a_kb_lc_m \tag{114}$$

あるいは

$$V_i=\frac{1}{i}V_{klm} \tag{115}$$

である．ただし $(iklm)$ は (1234) に偶数回の置換を施したものを表わす．

V_{ikl} と V_i はベクトル a_i, b_i, c_i で定義される3次元‘平行六面体’を表わす．そして V_i はこの3次元空間に直交する．なぜならば (114) から

$$V_ia_i=V_ib_i=V_ic_i=0 \tag{116}$$

がえられるからである．この‘平行六面体’の体積 V は擬ベクトル V_i の長さ

$$V^2=-V_iV_i=\frac{1}{3!}V_{klm}V_{klm} \tag{117}$$

で与えられる．

最後に，4階の反対称テンソルに対偶な擬テンソルは，1つの擬不変量である．特にこのテンソルが

$$\Sigma_{iklm}=\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_k & b_k & c_k & d_k \\ a_l & b_l & c_l & d_l \\ a_m & b_m & c_m & d_m \end{vmatrix} \tag{118}$$

なる形のときは，これに対偶な擬不変量は

$$\Sigma=\frac{1}{i4!}\delta_{iklm}\Sigma_{iklm}=\frac{1}{i}\delta_{iklm}a_ib_kc_ld_m$$
$$=\frac{1}{i}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{119}$$

である．Σ はベクトル a_i, b_i, c_i, d_i で定義される平行面体の体積を表わす．また Σ^2 は

$$\Sigma^2=-\frac{1}{4!}\Sigma_{iklm}\Sigma_{iklm} \tag{120}$$

となる．a_i, b_i, c_i, d_i がそれぞれ座標軸の方向を向き，長さが dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 なる無限小ベクトルとなる場合には，これに対応する4次元体積要素は

$$d\Sigma=\frac{1}{i}dx_1dx_2dx_3dx_4 \tag{121}$$

で，これは1つの擬不変量である．

45. 無限小 Lorentz 変換と回転を伴わない Lorentz 変換

無限小斉次1次変換 $(x_i)\to(x_i')$ の形は

$$x_i'=x_i+\epsilon_{ik}x_k=(\delta_{ik}+\epsilon_{ik})x_k \tag{122}$$

で表わされる．ただし ϵ_{ik} は大きさが無限小の量である．特に Lorentz 変換の場合には，(10) に (122) を代入したとき ϵ_{ik} の2乗の項は省略できるから次の関係式がえられる．

$$x_i\bar{x}_i=(x_i+\epsilon_{ik}x_k)(\bar{x}_i+\epsilon_{ik}\bar{x}_k)=x_i\bar{x}_i+\bar{x}_i\epsilon_{ik}x_k+x_i\epsilon_{ik}\bar{x}_k.$$

この関係式は x_i と $\bar{x}_i$ のあらゆる値に対して成立するはずである．このため

には

$$\epsilon_{ik}=-\epsilon_{ki} \tag{123}$$

が満たされることを必要とする．この条件は，無限小変換における直交性を示す関係式 (11), (14) にほかならない．

2 つの座標系 S と S' の時空座標を結ぶ Lorentz 変換 (3) において，S' の S に対する速度を $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$ とする．$\boldsymbol{v}$ に対応する 4 元速度 V_i は，(39) を用いれば

$$V_i=(\gamma\boldsymbol{v}, \gamma ic), \qquad (\gamma=1-v^2/c^2)^{1/2}).$$

V_i は S' 系で静止している点の 4 元速度であり，したがって x_4' 軸の方向を向いているから，このベクトルの S' 系における成分は

$$V_i'=(0, 0, 0, ic)$$

となる．4 元ベクトルの変換式を用いれば

$$V_k=V_i'\alpha_{ik}=ic\alpha_{4k}. \tag{124}$$

x_1'-, x_2'-, x_3' 各軸の方向の単位ベクトルをそれぞれ $e_i^{(1)}$, $e_i^{(2)}$, $e_i^{(3)}$ とすれば

$$e_k^{(\iota)\prime}=\delta_{k\iota} \qquad (\iota=1,2,3)$$

$$\left.\begin{aligned} &e_k^{(\iota)}=e_l^{(\iota)\prime}\alpha_{lk}=\delta_{l\iota}\alpha_{lk}=\alpha_{\iota k}\\ &e_l^{(\iota)}e_l^{(\kappa)}=e_l^{(\iota)\prime}e_l^{(\kappa)\prime}=\delta_{l\iota}\delta_{l\kappa}=\delta_{\iota\kappa}\\ &e_l^{(\iota)}V_l=e_l^{(\iota)\prime}V_l'=0 \end{aligned}\right\} \tag{124'}$$

回転を伴わない Lorentz 変換の場合には係数 α_{ik} は (II. 27) より次の様になる．

$$\alpha_{ik}=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{v_x^2}{v^2}(\gamma-1), & \dfrac{v_xv_y}{v^2}(\gamma-1), & \dfrac{v_xv_z}{v^2}(\gamma-1), & \dfrac{iV_1}{c}\\ \dfrac{v_yv_x}{v_2}(\gamma-1), & 1+\dfrac{v_y^2}{v^2}(\gamma-1), & \dfrac{v_yv_z}{v^2}(\gamma-1), & \dfrac{iV_2}{c}\\ \dfrac{v_zv_x}{v^2}(\gamma-1), & \dfrac{v_zv_y}{v^2}(\gamma-1), & 1+\dfrac{v_z^2}{v^2}(\gamma-1), & \dfrac{iV_3}{c}\\ \dfrac{-iV_1}{c}, & \dfrac{-iV_2}{c}, & \dfrac{-iV_3}{c}, & \dfrac{-iV_4}{c} \end{pmatrix} \tag{125}$$

この変換は (3+1)-空間で S 系および S' 系の時間軸を含む 2 次元平面内の回転を表わしている．

v_x, v_y, v_z が無限小の場合には，これらの 2 乗を含む項を省略して

$$V_1=v_x, \qquad V_2=v_y, \qquad V_3=v_z, \qquad V_4=ic$$

がえられ，(125) は

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{ik}=\delta_{ik}+\epsilon_{ik},\\ &\text{ただし}\\ &\epsilon_{\iota k}=0,\quad \epsilon_{\iota 4}=-\epsilon_{4\iota}=\frac{iV_\iota}{c},\quad \epsilon_{44}=0\end{aligned}\right\}\tag{126}$$

になる.

46. 逐次 Lorentz 変換

$$x_i'=\alpha_{ik}x_k,\quad S\to S',\quad x_i''=\alpha_{ik}'x_k',\quad S'\to S''\tag{127}$$

を相ついで行う2回の Lorentz 変換とする. これを合成した

$$x_i''=(\alpha_{il}'\alpha_{lk})x_k\tag{128}$$

はもちろん一つの Lorentz 変換である. すなわち

$$\alpha_{ik}''=\alpha_{il}'\alpha_{lk}$$

は α_{ik} や α_{ik}' と同じ直交関係 (11) と (14) を満足する. ところが, (127) の2つの変換が回転を伴わない変換である場合にも (128) は一般には回転を伴はない Lorentz 変換であるとは限らない. すなわち α_{ik} や α_{ik}' が (125) の形をしている場合にも α_{ik}'' が (125) なる形をとるとは限らない. α_{ik}'' が (125) の形をとるのは S, S' および S'' の時間軸が同一平面上にある場合に限る.

S' から S'' に移る変換が回転を伴わない無限小変換であるような特殊な場合には (126) によれば

$$\alpha_{ik}'=\delta_{ik}+\epsilon_{ik}',\quad \epsilon_{\iota\kappa}'=0,\quad \epsilon_{\iota 4}'=-\epsilon_{4\iota}'=\frac{iV_\iota'}{c},\quad \epsilon_{44}=0\tag{129}$$

で, V_i' は S' に対する S'' の4元速度である. そこで

$$\alpha_{ik}''=(\delta_{il}+\epsilon_{il}')\alpha_{lk}=\alpha_{ik}+\epsilon_{il}'\epsilon_{lk}\tag{130}$$

がえられる.

τ を粒子の固有時として, $x_i=f_i(\tau)$ を, S 中で任意の運動をする粒子の世界線を表わすものとする. 任意の時刻における静止系が次の瞬間における静止系と空間軸が同じ向きをもつように, この粒子の逐次静止系を決めることを試みよう. (127) の S', S'' が, それぞれ時刻 τ および $\tau+d\tau$ における粒子の瞬間的の静止系とする. そのときは S に対する S' の4元速度は

$$U_i(\tau)=\frac{dx_i}{d\tau}=\dot{f}_i(\tau)\tag{131}$$

である. 同様に, S に対する S'' の4元速度は

$$\begin{aligned}V_i&=U_i(\tau)+d\,U_i(\tau)=U_i(\tau)+\dot{U}_i(\tau)d\tau\\ &=\dot{f}_i(\tau)+\ddot{f}_i(\tau)d\tau\end{aligned}\tag{132}$$

である. S' におけるこれら 2 つの 4 元速度の成分は

$$U'_i(\tau)=\alpha_{ik}U_k=(0,0,0,ic). \tag{133}$$

$$V'_i=U'_i+dU'_i=\alpha_{ik}(V_k+dU_k)=U'_i+\alpha_{ik}dU_k. \tag{134}$$

S' から S'' への変換は回転を伴わぬ無限小 Lorentz 変換と考えているのであるから, S から S'' への変換係数 α''_{ik} は (130) と (129) から求められる. (129) 中の V'_i は (134) で与えられる. さて ϵ'_{ik} は

$$\epsilon'_{ik}=\frac{V'_iU'_k-V'_kU'_i}{c^2}=\frac{U'_kdU'_i-U'_idU'_k}{c^2}, \tag{135}$$

で与えられる. たしかに (133) を用いれば, この式は (129) で定義した ϵ'_{ik} と同じものになる.

このようにして, (130), (135), (134) から

$$\alpha''_{ik}-\alpha_{ik}=\frac{U'_ldU'_i-U'_idU'_l}{c^2}\alpha_{lk}$$

$$=\frac{1}{c^2}\alpha_{il}(U_kdU_l-U_ldU_k).$$

この場合, 係数 α_{ik} は τ の函数 $\alpha_{ik}(\tau)$ と見ることができる. その立場では α''_{ik} は $\alpha_{ik}(\tau+d\tau)$ である. したがって函数 $\alpha_{ik}(\tau)$ に対して次の微分方程式がえられる;

$$\frac{d\alpha_{ik}(\tau)}{d\tau}=\alpha_{il}\eta_{lk} \tag{136}$$

ただし

$$\eta_{ik}=\frac{\dot{U}_iU_k-\dot{U}_kU_i}{c^2}. \tag{137}$$

(14), (41), (41′) および (133) から α_{ik}, η_{ik} は次の関係式を満足することに注意しておこう.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{\kappa i}\alpha_{\lambda i}=\delta_{\kappa\lambda}, &&\alpha_{\kappa i}U_i=0,\\ &\alpha_{\lambda l}\eta_{li}\alpha_{\kappa i}=0, &&\alpha_{\kappa l}\eta_{li}U_i=-\alpha_{\kappa l}\dot{U}_l\\ &\alpha_{\kappa l}\eta_{li}\alpha_{\lambda m}\eta_{mi}=-\frac{(\alpha_{\kappa l}\dot{U}_l)(\alpha_{\lambda m}\dot{U}_m)}{c^2},\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

この関係式は後で利用する.

方程式 (136) は固定系 S から粒子の瞬時静止系 $S'=S'(\tau)$ へ移る変換を決定するもので, S' 系の座標を x'_i とすれば

$$x_i=x'_k\alpha_{ki}(\tau), \tag{139}$$

あるいは S' 系の原点を逐次移動して粒子が常に $S'(\tau)$ 系の原点に静止しているようにすれば

$$x_i=f_i(\tau)+x'_k\alpha_{ki}(\tau) \tag{140}$$

となる.

さて，いま考えている粒子に長さ1の空間ベクトル $\boldsymbol{e}'(\tau)$ を結びつけ，$S'(\tau)$ 系の空間軸に対して $\boldsymbol{e}'$ が，どの時刻にも同じ成分を有するようにしておく．例えば $\boldsymbol{e}'(\tau)$ は S' 系の座標軸の1つの方向を向いているものとする．そのときは，この $\boldsymbol{e}'$ は刻々，その方向を変えない変位をうけるだけである．(3+1)-空間ではこのベクトルは，成分が S' 系で

$$e'_i=(\boldsymbol{e}', 0) \tag{141}$$

で与えられる space-like な4元ベクトルで表わされる．その S 系での成分は

$$e_i(\tau)=e'_k\alpha_{ki}(\tau)=e'_\kappa\alpha_{\kappa i}(\tau) \tag{142}$$

で与えられる．e_i は U_i に直交する．なぜならば (133), (141) により

$$e_iU_i=e'_iU'_i=0 \tag{143}$$

だからである．さて (142), (136), (137) と (143) から

$$\begin{aligned}\frac{de_i(\tau)}{d\tau}&=e'_k\frac{d\alpha_{ki}(\tau)}{d\tau}\\&=e'_k\alpha_{kl}\frac{\dot U_lU_i-\dot U_iU_l}{c^2}\\&=\frac{(e_l\dot U_l)U_i-\dot U_i(e_lU_l)}{c^2},\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{de_i(\tau)}{d\tau}=\frac{(e_l\dot U_l)U_i}{c^2} \tag{144}$$

がえられる．$\tau=0$ で $S'(\tau)$ が S と一致する場合には

$$\tau=0 \text{ のとき } e_i=e'_i$$

で，この瞬間には粒子の速度は零である．それ以後の時刻では一般に $e_i\neq e'_i$ であり，粒子の速度がもう一度零になるような場合でも，一般にその瞬間，

$$e_i=(\boldsymbol{e}, 0)\neq e'_i=(\boldsymbol{e}', 0)$$

である．このことは，いま考えている単位ベクトルが S と S' でちがった成分を有することを意味し，これは，このベクトルが S 系に対して **Thomas 歳差** (§22 参照) を行っていることに相当する．

47. 任意の直線運動および等速円運動における粒子の逐次静止系

粒子が x_1 軸の方向に運動している場合は，$f_2=f_3=0$ であるから，

$$U_i=(\dot f_1,\ 0,\ 0,\ \dot f_4),\qquad \dot U_i=(\ddot f_1,\ 0,\ 0,\ \ddot f_4). \tag{145}$$

が成立する．さらに時刻 $\tau=0$ におけるこの粒子の S 系での速度は零とし，ま

たその時刻において $S'(\tau)$ は S に一致しているとする．一方 U_i は $U_iU_i=U_1^2+U_4^2=-c^2$ をみたすから，この関係と上述の初期条件を用いれば

$$U_i=(c\sinh\theta(\tau),\ 0,\ 0,\ ic\cosh\theta(\tau)),\tag{146}$$

をえる．ここに $\theta(\tau)$ は $\tau=0$ において零となる τ のある函数である．したがって

$$f_i(\tau)=\left(c\int_0^\tau\sinh\theta d\tau,\ 0,\ 0,\ ic\int_0^\tau\cosh\theta d\tau\right).\tag{147}$$

さて，$e_k^{(\iota)}(\tau)$ を逐次静止系 $S'(\tau)$ の空間軸の方向の単位ベクトルとすれば，$\tau=0$ のとき，

$$e_k^{(\iota)}(0)=\delta_{k\iota}\tag{148}$$

となる．この3つの単位ベクトルはいずれも (144) を満足するから

$$\frac{de_k^{(\iota)}}{d\tau}=(e_l^{(\iota)}\dot{U}_l)U_k/c^2.\tag{149}$$

一方 U_i, $\dot{U}_i$ は (145) で与えられるから，

$$e_k^{(2)}=\delta_{k2},\qquad e_k^{(3)}=\delta_{k3},\qquad e_2^{(1)}=e_3^{(1)}=0\tag{150}$$

が (149) の解であることが一目でわかる．(149) の積分は，これに U_k を乗じてもえられ，また $e_k^{(1)}$ を乗じてもえられる．その結果は

$$e_k^{(1)}U_k=0,\qquad e_k^{(1)}e_k^{(1)}=1\tag{151}$$

である．したがって

$$\left.\begin{aligned}&e_1^{(1)}U_1+e_4^{(1)}U_4=0,\qquad e_4^{(1)}=-e_1^{(1)}\frac{U_1}{U_4},\\&e_1^{(1)2}+e_4^{(1)2}=1,\\&e_1^{(1)2}\left(1+\frac{U_1^2}{U_4^2}\right)=-e_1^{(1)2}\frac{c^2}{U_4^2}=1\end{aligned}\right\}\tag{152}$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned}&e_1^{(1)}=\frac{U_4}{ic},\\&e_4^{(1)}=-\frac{U_4}{ic}\frac{U_1}{U_4}=\frac{i}{c}U_1,\end{aligned}\right\}\tag{153}$$

これらの結果を用いれば，(124) と (124′) より α_{ik} は

$$\alpha_{ik}=\begin{pmatrix}U_4/ic & 0 & 0 & iU_1/c\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\U_1/ic & 0 & 0 & U_4/ic\end{pmatrix}\tag{154}$$

をえる．これは特殊 Lorentz 変換にあたっている ((16) を見よ)．

(154), (146) および (147) 式を用いれば，変換公式 (140) は

$$\left.\begin{aligned} x_1&=c\int_0^\tau \sinh\theta d\tau+x_1'\cosh\theta(\tau)+x_4'\frac{\sinh\theta(\tau)}{i}\\ x_2&=x_2',\qquad x_3=x_3',\\ x_4&=ic\int_0^\tau\cosh\theta d\tau+x_1'i\sinh\theta(\tau)+x_4'\cosh\theta(\tau)\end{aligned}\right\}\tag{155}$$

となる.

特に粒子の運動が双曲線的の場合には (III. 46) より

$$d\tau=\sqrt{\left\{1-\frac{u_2}{c^2}\right\}}dt=\frac{dt}{\sqrt{\{1+(gt/c)^2\}}},$$

すなわち

$$\tau=\frac{c}{g}\sinh^{-1}\frac{gt}{c},\qquad t=\frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau}{c}\tag{156}$$

が成立する．よって (III. 47) と (156) から

$$\left.\begin{aligned} f_1(\tau)&=\frac{c^2}{g}\left(\sqrt{\left\{1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right\}}-1\right)=\frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau}{c}-1\right)\\ f_2&=0,\qquad f_3=0\\ f_4(\tau)&=i\frac{c^2}{g}\sinh\frac{g\tau}{c}.\end{aligned}\right\}\tag{157}$$

$$\left.\begin{aligned} U_i&=\dot{f}_i=\left(c\sinh\frac{g\tau}{c},\ 0,\ 0,\ ic\cosh\frac{g\tau}{c}\right)\\ \dot{U}_i&=\left(g\cosh\frac{g\tau}{c},\ 0,\ 0,\ ig\sinh\frac{g\tau}{c}\right)\end{aligned}\right\}\tag{158}$$

がえられる．(158) を (146) とくらべれば，この場合には $\theta(\tau)$ は

$$\theta(\tau)=\frac{g\tau}{c}\tag{159}$$

となり，変換公式 (155) は

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau}{c}-1\right)+x_1'\cosh\frac{g\tau}{c}+x_4'\frac{\sinh g\tau/c}{i}\\ x_2&=x_2',\qquad x_3=x_3'\\ x_4&=i\frac{c^2}{g}\sinh\frac{g\tau}{c}+x_1'i\sinh\frac{g\tau}{c}+x_4'\cosh\frac{g\tau}{c}\end{aligned}\right\}\tag{160}$$

となる.

逐次静止系 $S'(\tau)$ における粒子の4元加速度ベクトルの成分 $\dot{U}_i'$ は，変換係数 α_{ik} が (154) で与えられているから

$$\dot{U}_i'=\alpha_{ik}\dot{U}_k=\left(\frac{U_4\dot{U}_1}{ic}+\frac{i}{c}U_1\dot{U}_4,\ 0,\ 0,\ \frac{U_1\dot{U}_1+U_4\dot{U}_4}{ic}\right)$$

となり，これに (158) を用いれば，

$$U'_i=(g,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{161}$$

をえる．この結果から逐次静止系における粒子の加速度は常に g に等しいことがわかる (式 (42′) を見よ)．

次に，粒子が $(x_1,\ x_2)$ 面上，半径 a の円周を一定の角速度 ω で運動している場合の方程式 (136) の解についていささか論議を加えてみる．この場合には f_i は次式で与えられる．

$$f_i=(a\cos\omega\gamma\tau,\ a\sin\omega\gamma\tau,\ 0,\ ic\gamma\tau), \tag{162}$$

ただし，$\gamma=(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ で $u=a\omega$ は等速円運動を行っている粒子の速さ (一定) である．(162) より U_i, $\dot{U}_i$ は

$$\left.\begin{aligned} U_i&=(-a\omega\gamma\sin(\omega\gamma\tau),\ a\omega\gamma\cos(\omega\gamma\tau),\ 0,\ ic\gamma),\\ \dot{U}_i&=(-a\omega^2\gamma^2\cos(\omega\gamma\tau),\ -a\omega^2\gamma^2\sin(\omega\gamma\tau),\ 0,\ 0)\end{aligned}\right\} \tag{163}$$

下に示した係数 α_{ik} の表が方程式 (136) の解になっていることが，ごく簡単な計算によって確かめることができる．

$$\alpha_{ik}=$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta+\gamma\sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta-\gamma\cos\alpha\sin\beta & 0 & -i\dfrac{u\gamma}{c}\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta-\gamma\sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta+\gamma\cos\alpha\cos\beta & 0 & i\dfrac{u\gamma}{c}\cos\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\dfrac{u\gamma}{c}\sin\alpha & -i\dfrac{u\gamma}{c}\cos\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{164}$$

ただし

$$\alpha=\omega\gamma\tau,\qquad \beta=\gamma\alpha=\omega\gamma^2\tau.$$

S から $S'(\tau)$ への変換は，(139) または (140) の α_{ik} に (164) を代入すればよい．

$\tau=0$ の場合は

$$\alpha_{ik}(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & i\dfrac{u\gamma}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\dfrac{u}{c}\gamma & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{165}$$

この結果，$S'(c)$ 系の時空座標を x_i^0 で表わせば，(139) より

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_1^0, & x_2&=\gamma x_2^0-i\frac{u\gamma}{c}x_4^0 \\ x_3&=x_3^0, & x_4&=i\frac{u\gamma}{c}x_2^0+\gamma x_4^0 \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

がえられる．これはS系から，S系に対して x_2 軸の方向に速度uで走っている $S'(0)$ 系に移る特殊 Lorentz 変換を表わしている．

$\tau=\tau_1=2\pi/\omega\gamma$ における α_{ik} は (164) より下のようになる．

$$\alpha_{ik}(\tau_1)=\begin{pmatrix} \cos\beta_1 & -\gamma\sin\beta_1 & 0 & -i\frac{u\gamma}{c}\sin\beta_1 \\ \sin\beta_1 & \gamma\cos\beta_1 & 0 & i\frac{u\gamma}{c}\cos\beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\frac{u\gamma}{c} & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{167}$$

ただし $\beta_1=2\pi(\gamma-1)$．また係数 $\alpha_{ik}(\tau_1)$ は，

$$\beta_{ik}=\begin{pmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{168}$$

を導入すれば，$\tau=0$ における $\alpha_{ik}(0)$ と

$$\alpha_{ik}(\tau_1)=\beta_{il}\alpha_{lk}(0)$$

の関係で結ばれている．

$S'(\tau_1)$ 系の時空座標を x_i^1 で表わせば変換式は

$$x_i^1=\alpha_{ik}(\tau_1)x_k=\beta_{il}\alpha_{lk}(0)x_k=\beta_{il}x_l^0,$$

すなわち

$$\begin{aligned} x_1^1&=\cos\beta_1 x_1^0-\sin\beta_1 x_2^0, \\ x_2^1&=\sin\beta_1 x_1^0+\cos\beta_1 x_2^0, \\ x_3^1&=x_3^0, \qquad x_4^1=x_4^0 \end{aligned} \tag{169}$$

で与えられる．

この結果からわかるように，$S'(\tau)$ 系は $S'(0)$ 系とは一致はしないが，S 系の (x_1, x_2)-平面上で粒子の運動方向に角度 β だけ $S'(\tau_1)$ 系を回転すれば $S'(\tau_1)$ 系の空間軸は $S'(0)$ 系の空間軸したがってS系の空間軸の方向と一致する．逆にいえば，S系の座標軸を (x_1x_2)-平面内で角度 $-\beta=-2\pi(\gamma-1)$ だけ回転すれば，S系の座標軸は $S(\tau_1)$ 系の座標軸と同じ方向を向く．これはすでに述べた Thomas 効果のためである．Thoms 歳差の速度に関する式 (II. 65)

を週期 T にわたって積分すれば

$$\int_0^T \omega dt = -\int_0^T (\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}}{v^2}dt$$

となる．今の場合 $\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v}$ および $\dot{\boldsymbol{v}}$ にそれぞれ直交する一定のベクトルであり，$\dot{v}T=v\omega T=2\pi v$ が成立するから，歳差の角度はちょうど

$$\theta=-2\pi(\gamma-1)=-\beta_1. \tag{170}$$

になる．

48. テンソル場と擬テンソル場．テンソル解析

普通の空間の場合と同様に，(3+1)-空間の各点に n 階のテンソルが対応しているとき，これを (3+1)-空間における n 階のテンソル場という．この空間の各点に特に 1 つの不変量が対応しているとき，零階のテンソル場，いわゆるスカラー場という．詳しく云えば，各座標系 S 毎に，座標の函数 $\phi(x)=\phi(x_i)=\phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ があって，$\phi'(x')$ が座標系 S' に対応するこの函数で (x_i') と (x_i) が，それぞれ S' および S 系から観た**同一の**事象点の座標であるとき

$$\phi'(x')=\phi(x) \tag{171}$$

となることである．一般には，ϕ' は (x_i') の函数として，(x_i) の函数としての ϕ とはちがった函数である．したがって，スカラー函数 $\phi(x_i)$ は，一般に座標の函数として，Lorentz 変換によって**形の変らないような函数ではない**．ϕ が形の不変な量 (4) のみ函数である場合に限って，形の変らない函数である．

同様にして，各事象点に 1 つの 4 元ベクトルが対応するとき階数 1 のテンソル場という．この 4 元ベクトルの任意の 2 座標系 S, S' における成分を $a_i(x)$ および $a_i'(x')$ とすれば，これらは事象点の函数であって，変数 $(x')=(x_i')$ と $(x)=(x_i)$ の関係が (3), (13) で与えられるとき

$$a_i'(x')=\alpha_{ik}a_k(x) \tag{172}$$

である．

もっと高階のテンソル場についても (171) および (172) に類する式が成り立つ．

さて，任意のスカラー場 $\phi(x)$ から，共変的な操作により，任意の座標系 S で $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}$ を成分とするベクトル場を作ることができる．それは，(171) を微分して

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x_i'}=\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}=\alpha_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} \tag{173}$$

となるからである．ただし，ここで

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}=\alpha_{ik} \tag{174}$$

という (13) からえられる関係を用いた．

4元ベクトル $\partial\phi/\partial x_i$ を ϕ の勾配 (gradient) といい

$$\mathrm{grad}_i\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{175}$$

と書く．これは3次元の gradient ベクトルに相等するものである．

同じく，ベクトル場 $a_i(x)$ から，任意の座標系で $\partial a_i/\partial x_k$ を成分とする2階のテンソル場を作ることができる．それは (172) を微分して

$$\frac{\partial a_i'}{\partial x_k'}=\alpha_{il}\frac{\partial a_l}{\partial x_k'}=\alpha_{il}\frac{\partial x_m}{\partial x_k'}\frac{\partial a_l}{\partial x_m}=\alpha_{il}\alpha_{km}\frac{\partial a_l}{\partial x_m} \tag{176}$$

がえられるからである．これを反対称的に組み合せて作った $\partial a_k/\partial x_i-\partial a_i/\partial x_k$ もまた，2階のテンソル場で，これをベクトル場 $a_i(x)$ の回転 (curl) と云う．そして，これを

$$\mathrm{curl}_{ik}\,a\equiv\mathrm{curl}_{ik}\{a_i\}\equiv\frac{\partial a_k}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_k} \tag{177}$$

で表わす．($\mathrm{curl}_{ik}\{a_i\}$ という式で i について加え合わせてならないのはいうまでもない) curl は一種の反対称テンソルである．したがって，3次元空間では，これは軸性ベクトル curl $\boldsymbol{a}$ に対応する．

テンソル場 $\partial a_i/\partial x_k$ を縮約することにより，階数零のテンソルがえられる．このようにして，ベクトル場 $a_i(x)$ から，1つのスカラー場

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\frac{\partial a_i'}{\partial x_i'} \tag{178}$$

が作られる．これをベクトル場 a_i の発散 (divergence) と云う．これは

$$\mathrm{div}\,a=\mathrm{div}\{a_i\}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \tag{179}$$

で表わされ，3次元の場合の発散，div $\boldsymbol{a}$ に相当するものである．

a_i がスカラー場 ψ の勾配，すなわち

$$a_i=\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \tag{180}$$

なるときは，a_i の発散は

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_i}=\Box\psi \tag{181}$$

となる．ここで

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_\iota\partial x_\iota}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{182}$$

とおいた. 演算子 (182) は d'Alembert (ダラムベール) の演算子と呼ばれる共変的な演算子で, Laplace (ラプラス) の演算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_\iota\partial x_\iota}$$

の 4 次元的な拡張である.

同様な方法で, n 階のテンソル場から, 微分によって $n+1$ 階のテンソル場を作ることができ, また, その結果について, 縮約を行って, $n-1$ 階のテンソル場がえられる. いままで考えてきた特別な場合と同様に, これが可能なのは, テンソルの変換式と (173) 式および直交関係 (11), (14) からの帰結である. このようにして, 2 階のテンソル場 t_{ik} から 3 階のテンソル場 $\partial t_{ik}/\partial x_l$ が作られ, その縮約によって, 第 1 階のテンソル, すなわちベクトル場

$$\mathrm{div}_i\, t\equiv\mathrm{div}_i\{t_{ik}\}=\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} \tag{183}$$

がえられる. これをテンソル場 t_{ik} の発散 (divergence) と云う.

テンソル場 F_{ik} が反対称の場合,

$$\mathrm{curl}_{ikl}\, F\equiv\mathrm{curl}_{ikl}\{F_{ik}\}=\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}. \tag{184}$$

なる操作によって, 完全に反対称な 3 階のテンソル場がえられる. これをテンソル F_{ik} の回転 (curl) と云う. (184) 中の 3 つの独立な添字のうち任意の 2 つを入れ替えるとこの式全体の符号が変る. したがって, 添字のうちの 2 つが等しい場合には $\mathrm{curl}_{ikl}\, F$ は零にする. よってテンソル curl_{ikl} は $\frac{4!}{3!1!}=4$ 個の独立成分しかもっていない. F_{ik} があるベクトル場の curl に等しいとき, すなわち

$$F_{ik}=\mathrm{curl}_{ik}\, a=\frac{\partial a_k}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_k} \tag{185}$$

なるとき, F_{ik} の curl は恒等的に零, すなわち

$$\mathrm{curl}_{ik}\, F\equiv 0 \tag{186}$$

である.

全く同様に, 空間の各点に 1 つの擬テンソルが附属している場合, これを擬テンソル場という. これらは時にテンソル密度と呼ばれることがある. それは $t_{ik\ldots\ldots}$ が擬テンソルの場合には $t_{ik\ldots\ldots}dx_1dx_2dx_3dx_4$ は (121) によって, 1 つのテンソルだからである. したがって, 擬スカラーは零階のテンソル密度であり,

擬ベクトルは1階のテンソル密度，……である．§44で定義したテンソルとそれに対隅な擬テンソルの間の相互関係と全く同じ方法で，いろいろな種類の反対称テンソルに対隅なテンソル密度を対応させることができる．$\mathrm{curl}_{ik}F$ に対隅なベクトル密度は $\mathrm{div}_i F^*$ である．ここに F^*_{ik} は F_{ik} に対隅なテンソル密度である．何となれば，(108) により，

$$\frac{\partial F^*_{ik}}{\partial x_k}=\frac{1}{2i}\delta_{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k}=\frac{1}{i3!}\delta_{iklm}\left(\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{mk}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_m}\right) \quad (187)$$

となり，この式は $\mathrm{div}_i F^*$ と $\mathrm{curl}_{ikl} F$ が，ちょうど互に対偶であることを示しているからである．

49. 4次元空間における Gauss の定理

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ を3次元空間のベクトル場，V を閉曲面 σ で囲まれた3次元空間内のある領域すれば，通常の3次元空間における Gauss の定理は

$$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,dV=\int_\sigma a_n d\sigma \quad (188)$$

と書ける．ここで a_n は σ の面積素 $d\sigma$ の外向き法線の方向の $\boldsymbol{a}$ の成分を表わす (附録1でこの定理を証明する)．このように Gauss の定理によって，(188) の左辺の体積積分を体積 V を囲む2次元的な境界 σ に沿う積分に変形することができる．$\boldsymbol{n}$ を外向き方線の方向の単位ベクトルとすれば，(188) は

$$\int_V \frac{\partial a_\iota}{\partial x_\iota}dV=\int_\sigma a_\iota n_\iota d\sigma, \quad (189)$$

のようにも書ける．ここに dV は (107) で与えられる体積素である．

σ の面積素として σ 上の無限小ベクトル dx_ι と δx_ι を2辺とする平行四辺形をとれば，面積素は，(99) 中の a_ι と b_ι をそれぞれ dx_ι, δx_ι でおきかえたテンソル $d\sigma_{\iota\kappa}=dx_\iota\delta x_\kappa-dx_\kappa\delta x_\iota$ で表わされる．またこの代りにこれに対応する (100) で定義された軸性ベクトル $d\sigma_i$ で無限小の平行四辺形を表わしてもよい．このベクトルは面積素に直交するから，(189) は

$$\int_V \frac{\partial a_\iota}{\partial x_\iota}dV=\int_\sigma a_\iota d\sigma_\iota=\int a_\iota\delta_{\iota\kappa\lambda}dx_\kappa\delta x_\lambda \quad (190)$$

のように書ける．ただしベクトル dx_ι, δx_ι の順序は軸性ベクトル $d\delta_\iota$ が領域 V の外向きを指す法線の方向に向くようにする．

Gauss の定理をこの形で書き表わせば，直ちに4次元の場合に拡張できる†．$a_\lambda(x)$ を4元ベクトル場，Σ を3次元的閉曲面 V で囲まれた (3+1) 空間の領

† A. Sommerfeld, *Ann. d. Phys.* **32**, 749 (1910); **33**, 649 (1910)

域とすると，拡張された Gauss 定理は次のように表現される．

$$\int_{\Sigma}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}d\Sigma=\int_V a_i dV_i=\frac{1}{i}\int a_i\delta_{iklm}dx_k\delta x_l\Delta x_m, \tag{191}$$

ここに $d\Sigma$ は (121) によって与えられる 4 元的体積素，(dx_i), (δx_i) および (Δx_i) は境界面 V 内の 3 つの 4 元ベクトルである．$d\Sigma$ に対応する擬 4 元ベクトル dV_i は (114) での (a_i), (b_i), (c_i) をそれぞれ (dx_i), (δx_i), (Δx_i) とおいたものである．

境界 V のある範囲 Ω が $x_4=\text{const.}$ で定義される超平面であれば，Ω 上のベクトル (dx_i), (δx_i), (Δx_i) は時間軸に直交する．そこで (dx_i), (δx_i), (Δx_i) を

$$\begin{aligned}dx_i&=(dx_1,\ 0,\ 0,\ 0),\\ \delta x_i&=(0,\ dx_2,\ 0,\ 0),\\ \Delta x_i&=(0,\ 0,\ dx_3,\ 0).\end{aligned}$$

のように選ぶことができる．このように選べば超平面 Ω 上の擬ベクトル dV_i の成分は，

$$dV_i=(0,\ 0,\ 0,\ \pm i dx_1 dx_2 dx_3), \tag{191'}$$

となる．式中の正負の別は，領域 Σ から外向きに向う Ω の法線が時間軸の負の向きのときは正，正の向きのときは負をとるようになっている．

$t_{\iota\kappa}$ が空間テンソルであれば，(189) および (190) にならって

$$\int_V\frac{\partial t_{\iota\kappa}}{\partial x_\kappa}dV=\int_\sigma t_{\iota\kappa}n_\kappa d\sigma=\int_\sigma t_{\iota\kappa}d\sigma_\kappa=\int_\sigma t_{\iota\kappa}\delta_{\kappa\lambda\mu}dx_\lambda\delta x_\mu \tag{192}$$

がえられ，これを (3+1) 空間に拡張した関係式は

$$\int_\Sigma\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k}d\Sigma=\int_V t_{ik}dV_k=\int t_{ik}\delta_{klmn}dx_l\delta x_m\Delta x_n \tag{193}$$

となる．

50. 各部分が互に作用を及ぼし合っていないような (incoherent) 物質に対する力学の基礎方程式

以上の各節で展開した数学的方法の最初の応用として，連続的に分布している物質が外力の作用によって行う運動について考えよう．第 III 章で導いた質点の運動の基礎方程式をこのような系に適用するため，連続的な質量分布を非常に多数の粒子の分布の極限の場合と考えることにしよう．粒子が非常に小さくて単位体積当りの粒子の数が非常に多く，われわれの巨視的な測定機械をもってしては個々の粒子を区別できないときは，質量の分布は，任意の慣性系 S

で質量密度 $\mu(\boldsymbol{x}, t)$ によって記述される．この質量密度は，実用目的上，時空変数の連続函数と見なしてよい．$\mu(\boldsymbol{x}, t)$ は，時刻 t において場所 $\boldsymbol{x}$ にある体積要素 δV 内にある全質量が $\mu\delta V$ に等しいということで定義する．任意の時刻，任意の場所におけるこの物質の運動は，速度ベクトル $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ で記述される．これは $\boldsymbol{x}$ と t の函数である．そのとき，質量の流れの密度は $\mu\boldsymbol{u}$ に等しい．Newton 力学では質量は保存量であった．ところがこの物質に力が作用するときは質点の速度，したがって (III. 22) によればその相対論的な質量が時間と共に変化するから，相対論の場合には質量の流れは保存量でない．これに反し，物質の固有質量は多くの場合，すなわち各点における 4 元力が，その場所における物質の 4 元速度に直交するような場合，すなわち (57) 式が各時刻，各地点で成り立つような場合には保存される．

固有質量の密度 μ_0，すなわち単位体積当りの固有質量は，(III. 22) により任意の慣性系 S で，μ と

$$\mu_0=\mu\sqrt{(1-u^2/c^2)}. \tag{194}$$

なる関係で結ばれている．μ_0 は μ と同じく，$\boldsymbol{x}$ と t の与えられた函数である．

さて，与えられた時刻に物質内に 1 点を考え，その点で物質が瞬間的に静止しているような慣性系 S^0 を導入することができる．S^0 系では，(194) は

$$\mu_0^0=\mu^0 \tag{195}$$

となる．ここで，S^0 系に関する量にはみな肩に 0 をつけた．

このように，静止系では固有質量密度は相対論的質量密度に等しい．したがって μ_0 ではなくて $\mu_0^0=\mu^0$ が不変量である．また，さらに $\mu_0\sqrt{(1-u^2/c^2)}$ が一つの不変量であることが容易にわかる．なぜなれば，S 系で体積が δV であるような物質の小部分を考えれば，これは静止系 S^0 では体積 δV_0 を有し，その間には (II. 34) によって

$$\delta V=\delta V^0\sqrt{(1-u^2/c^2)} \tag{196}$$

なる関係がある．そして両系で表わされた不変な固有質量は

$$\mu_0\delta V=\mu_0^0\delta V^0=\mu^0\delta V^0 \tag{197}$$

で，(196) によればこれから

$$\mu_0\sqrt{(1-u^2/c^2)}=\mu^0=\text{不変量}, \tag{198}$$

またはさらに，(194) によって，

$$\mu\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\mu^0 \tag{199}$$

がえられる．したがって (198), (199) 両式の左辺の諸量が不変量でなければな

らぬからである．

$\phi=\phi(\boldsymbol{x},\ t)$ を S における時空座標の与えられた函数とする．そのとき，局所時による ϕ の微分 $\partial\phi/\partial t$，すなわち空間の 1 定点における ϕ の単位時間当りの変化と，物質と一緒に運動しながら測った ϕ の単位時間当りの変化，すなわち実質的微分係数 (substantial differential coefficient) $\dfrac{d\phi}{dt}$ とは区別しなければならない．この 2 つの微分の間の関係は

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,\phi) \tag{200}$$

であることは明らかである．3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\ t)$ についても同様に

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{a} \tag{201}$$

である．なぜならば，$\boldsymbol{a}$ の各成分毎に (200) と同じ型の式が成立つからである．

さて，体積が V であるような領域を囲む閉曲面 σ 内に時刻 t に存在する物質について考えよう．時刻 $t+dt$ には，この物質の体積は

$$dV=dt\int_\sigma u_n d\sigma \tag{202}$$

だけ増していることになる．ここで，右辺の積分は表面 σ 全体に亘る表面積分，u_n は面積素 $d\sigma$ の外向き法線方向への $\boldsymbol{u}$ の成分を表わす．時間 dt の間に面積素 $d\sigma$ は $\boldsymbol{u}dt$ だけ動き，したがってその間に $d\sigma$ は体積 $u_n dtd\sigma$ を描くからである．Gauss の定理 (188) により (202) は

$$\frac{dV}{dt}=\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}dV \tag{203}$$

と書くことができる．この式は物質の任意の部分について成り立つ式である．特に時刻 t において，無限小体積素 δV 内にある物質について考えれば，単位時間当りの体積の増加として

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \tag{204}$$

をえる．

固有質量が保存されるような系の考察からはじめることにする．このときは，時刻 t において体積が δV の質点については

$$\frac{dt}{d}(\mu_0\delta V)=\frac{d\mu_0}{dt}\delta V+\mu_0\frac{d\delta V}{dt}=0 \tag{205}$$

でなければならない．(204) によれば，これは

$$\frac{d\mu_0}{dt}+\mu_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0 \tag{206}$$

と書くことができる．固有質量の保存を表わすこの式は，(200) を $\mu_0(\boldsymbol{x}, t)$ なる函数に適用することにより，別の形に書くことができる．すなわち

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,\mu_0)+\mu_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0,$$

あるいは

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\mu_0\boldsymbol{u})=0 \tag{207}$$

となる．$\mu_0\boldsymbol{u}$ は，固有質量の流れの密度であるから，(207) はこの系内に固有質量のわき出しも，吸込みもないことを表わしている連続方程式である．

(39) により，われわれは任意の時刻に，物質中の任意の1点における4元速度 U_i を定義することができる．$U_i=U_i(x)$ は時空座標の函数であるから，(3+1)-空間の4元ベクトル場である．同様に (195), (199) で定義される不変な質量密度 μ^0 は (3+1)-空間でのスカラー場と考えられる．μ^0 は任意の慣性系における時空座標の函数

$$\mu^0=\mu(x)\sqrt{\{1-u^2(x)/c^2\}}=\mu^0(x) \tag{208}$$

である．

スカラー μ_0/c とベクトル U_i を掛け合わせて，新しく4元ベクトル

$$c_i=\frac{\mu^0 U_i}{c} \tag{209}$$

を作る．これを固有質量の4元的流れの密度という．(39), (198) によれば c_i の成分は

$$c_i=\left\{\frac{\mu^0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(c^2-u^2)}},\ \frac{i\mu^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right\}=\left\{\frac{\mu_0\boldsymbol{u}}{c},\ i\mu_0\right\} \tag{210}$$

となり，連続方程式 (207) は

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_i}=\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu^0 U_i)}{\partial x_i}=0 \tag{211}$$

なるテンソル型に書くことができる．

(211) の左辺は，4 元的流れの密度の4次元的な発散 (178) に等しい．したがって，この式が (3+1) 空間内の廻転に対して不変なことは自明である．

連続的に分布している物質の各部分に作用する力は，一部は外部から作用する力であり，一部は，この連続体の隣り合う部分同志の間に作用する弾性的な力である．この章では，弾性的な力の方は完全に無視することにし，これを考察することは第 VI 章にまわすことにする．したがって，ここでは，物質をお互に作用を及ぼし合わない (incoherent) 塵のあつまりと考えるのである．一方，外部から作用する力は，体積力で，任意の慣性系について，体積素

δV に作用する力が $\boldsymbol{f}\delta V$ に等しいとして定義される力の密度 $\boldsymbol{f}$ で記述される.

さて体積が δV, 固有質量が $\mu_0\delta V=\mu^0\delta V^0$ なる小さな物質粒子を考えよう. U_i をその 4 元速度とすれば, この粒子の運動量は, (50) により

$$p_i=\mu^0\delta V^0 U_i \tag{212}$$

である, 4 元力 (54) としては (196) により,

$$F_i=\left(\frac{\boldsymbol{f}\delta V}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})\delta V/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right)=\left(\boldsymbol{f},\ \frac{i(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})}{c}\right)\delta V^0 \tag{213}$$

がえられる. δV^0 は不変量であり, F_i は 4 元ベクトルであるから

$$f_i=\left(\boldsymbol{f},\ \frac{i(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})}{c}\right) \tag{214}$$

なる量も 4 元ベクトルを形成し, これが 4 元的な力の密度である. その空間成分 $\boldsymbol{f}$ は普通の力の密度に等しく, f_4 は単位時間に単位体積に対してなされる仕事に i/c を掛けたものに等しい.

さて, いま考えている粒子の運動は (55) 式で記述される. (212), (213) を (55) に代入すれば, 固有質量が保存されるとき, すなわち $\frac{d}{d\tau}(\mu^0\delta V^0)=0$ なるときは

$$\mu^0\frac{dU_i}{d\tau}=f_i \tag{215}$$

をえる. ここで f_i は (214) で与えられる. μ^0 と $d\tau$ は不変量であるから, この式の両辺は 4 元ベクトルである. その最初の 3 成分はこの場合も運動方程式であるが, 第 4 成分はエネルギー保存の定理を表わす. (214) と (39) によれば,

$$f_iU_i\equiv 0 \tag{216}$$

である, これは §38 で論じたように固有質量の保存にとって本質的な関係である. (215) に U_i をかけ, i について加え合わせれば (41′) により右辺は零になる. したがって (215) 式は (216) と両立する関係であることがわかる.

力学の基礎方程式が (215) のように簡単になるのは固有質量が保存する場合だけである. この仮定を取り去るときは, (59) にしたがって, 4 元的な力の密度として

$$f_i=\left\{\boldsymbol{f},\ \frac{i}{c}((\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})+q)\right\} \tag{217}$$

を用いなければならない. q は単位時間に単位体積当りに放出される力学的エネルギー以外のエネルギーの量を表わす. したがって $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})+q$ は単位体積当

りの全効果を表わす．この場合には (55) の左辺は

$$\frac{d}{d\tau}(\mu^0 U_i \delta V^0) = \frac{d(\mu^0 U_i)}{d\tau}\delta V^0 + \mu^0 U_i \frac{d\delta V^0}{d\tau} \tag{218}$$

となる．δV^0 と $d\tau$ は共に静止系 S_0 で測った粒子の体積および時間であるから，(204) を静止系に適用して

$$\frac{d\delta V^0}{d\tau} = \delta V^0 \,\mathrm{div}^0\, \boldsymbol{u}^0 \tag{219}$$

をえる．ここで div^0 は，S_0 系の空間座標 (x_i^0) についての微分を表わす．静止系では $\boldsymbol{u}^0$ 自身は零であるが，その座標についての微分が零である必要はない．$\partial U_i/\partial x_i$ は不変量であるから，U_i と U_i^0 に関する (39) 式により，

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k^0}{\partial x_k^0} = \mathrm{div}^0\, \boldsymbol{u}^0 \tag{220}$$

が成立する．(217)—(220) を (55) に代入すれば，(215) の代りに，この一般の場合は

$$\frac{d}{d\tau}(\mu^0 U_i) + \mu^0 U_i \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = f_i \tag{221}$$

をえる．この場合の f_i は (217) で与えられるものである．さらに

$$\frac{d}{d\tau}(\mu^0 U_i) = \frac{\partial(\mu^0 U_i)}{\partial x_k}\frac{d x_k}{d\tau} = \frac{\partial(\mu^0 U_i)}{\partial x_k} U_k \tag{222}$$

であるから，(221) は

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mu^0 U_i U_k) = f_i \tag{223}$$

と書くことができる．これが固有質量が保存されなくてもよいような一般の場合における，連続的質量分布体の運動を支配する基礎方程式である．

(217) と (39) から，こんどは

$$f_i U_i = -\frac{a}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} = -q^0 \tag{224}$$

がえられる．q^0 は静止系における力学的効果以外の効果である．これはもちろん不変量であって，(224) から

$$q = q^0 \sqrt{(1-u^2/c^2)} \tag{225}$$

となる．この式に不変量

$$\delta V \varDelta t = \delta V^0 \varDelta\tau$$

を掛ければ，$\varDelta Q = q\delta V \varDelta t$ が時間 $\varDelta t$ の間にある物質粒子に運び込まれる熱量であるから，もう一度 (66) 式がえられたことになる．(223) に U_i をかけて加え合わせれば，(41)，(41′) および (224) を用いて

$$\frac{\partial(\mu^0 U_k)}{\partial x_k}=\frac{q^0}{c^2},\tag{226}$$

あるいは (209) と (210) により,

$$\frac{\partial\mu_0}{\partial t}+\operatorname{div}(\mu_0\boldsymbol{u})=\frac{q^0}{c^2}\tag{227}$$

がえられる．これは系が固有質量のわきだしを含んでいる場合に対する (211) と (207) 式の一般化であって，わきだしの密度の式 q^0/c^2 は Einstein の一般定理 (III. 74) に符合している．

以上の考察では物質中に**熱伝導が起っていない**ことを暗々裡に仮定して来た．したがって熱の移動は対流によってのみ行われたのである．熱伝導が起るようなもっと一般の場合には，熱伝導によるエネルギーの移動が物質の運動以外の運動量の存在を意味し，これが (223) 式のはじめの 3 成分にも変化をもたらすかも知れないことを考慮に入れなければならない．

51. 運動エネルギー・運動量テンソル

(223) の左辺に現われた量

$$\theta_{ik}=\mu^0 U_i U_k\tag{228}$$

は 2 階の対称テンソルで，運動エネルギー・運動量テンソル†とよばれる．θ_{ik} を用いれば (223) は

$$\frac{\partial\theta_{ik}}{\partial x_k}=f_i\tag{229}$$

と書かる．すなわち 4 元力の密度が運動エネルギー・運動量テンソルの発散に等しい．さて，これからこのテンソルの各成分を (39), (198) および (199) を用いて求めて見る．先ず

$$\theta_{44}=-\frac{\mu^0c^2}{1-u^2/c^2}=-\frac{\mu_0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=-\mu c^2=-h,\tag{230}$$

ここで h はエネルギー密度，すなわち厳密にいえば単位体積あたりの運動エネルギーと固有エネルギーの和である．(230) に δV を乗じたものの右辺は負号を無視すれば，体積 δV を占める微小粒子のエネルギーに等しい．

$\theta_{4l}(l=1,\ 2,\ 3)$ は空間ベクトルの成分になっており，

$$(\theta_{41},\ \theta_{42},\ \theta_{43})=\frac{i}{c}\frac{\mu^0c^2}{1-u^2/c^2}\boldsymbol{u}=\frac{i}{c}\frac{\mu^0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\boldsymbol{u}$$
$$=\frac{i}{c}\mu c^2\boldsymbol{u}=\frac{i}{c}h\boldsymbol{u}\tag{231}$$

† H. Minkowski, *Gött. Nachr.*, p. 53 (1908); *Math. Ann.* **68**, 472 (1910)

となる．$\theta_{\iota 4}(\iota=1,2,3)$ も空間ベクトルをつくり，

$$(\theta_{14},\ \theta_{24},\ \theta_{34})=\frac{ic\mu_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=ic\boldsymbol{g}. \tag{232}$$

方程式 (229) をながめれば ((236) と (238) を参照せよ)，

$$\frac{c}{i}\theta_{4\iota}=h\boldsymbol{u} \quad と \quad \theta_{\iota 4}/ic=\boldsymbol{g}$$

はそれぞれ**エネルギー流の密度**と**運動量密度**という意味をもっている．エネルギー・運動量テンソルの対称性から $\theta_{\iota 4}=\boldsymbol{g}_{4\iota}$ すなわち

$$\boldsymbol{g}=\frac{h}{c^2}\boldsymbol{u} \tag{233}$$

が成立する．これは明らかにエネルギー h が質量 h/c^2 に対応していることを示している．最後にエネルギー・運動量テンソルの空間部分 $\theta_{\iota\kappa}$ は

$$\theta_{\iota\kappa}=\frac{\mu_0 u_\iota u_\kappa}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=g_\iota u_\kappa \tag{234}$$

となる．ここに g_ι と u_κ はそれぞれ空間ベクトル $\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{u}$ の成分である．

(231) より $\theta_{4\iota}$ がエネルギー流の密度を表わすことがわかるが，これと並行して (234) の空間テンソル $\theta_{\iota\kappa}$ の各行，すなわち

$$(\theta_{\iota 1},\ \theta_{\iota 2},\ \theta_{\iota 3})=g_\iota\boldsymbol{u} \tag{235}$$

は，運動量成分 g_ι の流れの密度と解釈できる．そこで $\theta_{\iota\kappa}$ を**運動量の流れのテンソル**とよぶ．

(229) の第 4 の方程式はエネルギー保存則を表わすが，これを (230), (231) および (217) を用いて変形すれば

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{div}\,(h\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})+q, \tag{236}$$

または

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\mu\boldsymbol{u})=\frac{(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})+q}{c^2} \tag{237}$$

となる．方程式 (237) は方程式 (227) に完全に同型である．前では，q^0/c^2 が固有質量のわきだし密度 (source density) を表わしているのに対し，ここでは $((\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})+q)/c^2$ が相対論的質量のわきだし密度になっている．この結果もたしかに Einstein の関係式 (III. 74) に合致している．

(239) の他の 3 つの方程式，すなわち運動方程式も (217), (232) および (234) を用いて

$$\frac{\partial g_\iota}{\partial t}+\frac{\partial\theta_{\iota\kappa}}{\partial x_\lambda}=f_\iota, \tag{238}$$

$$\frac{\partial g_\iota}{\partial t}+\mathrm{div}\,(g_\iota \boldsymbol{u})=f_\iota, \tag{239}$$

のように変形される．方程式 (239) は，エネルギーに対する方程式 (236) と同じ役割を運動量に対して果している．この方程式によって，物質の連続体内の運動量の流れのもようが制御される．また式中の力の密度 $\boldsymbol{f}$ は運動量のわきだしになっている．

(238) に x_κ を乗じ，これとこれの ι と κ を交換した式との差をとれば

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_\iota x_\kappa-g_\kappa x_\iota)+\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(\theta_{\iota\lambda}x_\kappa-\theta_{\kappa\lambda}x_\iota)-\theta_{\iota\kappa}+\theta_{\kappa\iota}$$
$$=f_\iota x_\kappa-f_\kappa x_\iota \tag{240}$$

がえられる．この式の左辺中の $-\theta_{\iota\kappa}+\theta_{\kappa\iota}$ は $\theta_{\iota\kappa}$ の対称性すなわち (234) により零となる．

$$m_{\iota\kappa}=x_\iota g_\kappa-x_\kappa g_\iota \tag{241}$$
$$d_{\iota\kappa}=x_\iota f_\kappa-x_\kappa f_\iota \tag{242}$$

によって角運動量の密度 $m_{\iota\kappa}$，力のモーメントの密度 $d_{\iota\kappa}$ を導入し，((82)—(86) を参照)，$\theta_{\iota\kappa}$ に (234) を用いれば，(240) は

$$\frac{\partial m_{\iota\kappa}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(m_{\iota\kappa}u_\lambda)=d_{\iota\kappa} \tag{243}$$

となる．この方程式をさらに変形して

$$\frac{\partial m_{\iota\kappa}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})m_{\iota\kappa}+m_{\iota\kappa}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=d_{\iota\kappa} \tag{244}$$

とし，(244) に δV を乗じて，(200) および (204) を用いれば，最後に

$$\frac{d}{dt}(m_{\iota\kappa}\delta V)=d_{\iota\kappa}\delta V \tag{245}$$

がえられる．

方程式 (245) は体積が δV の微小粒子についての角運動量の定理を表わしている．$\theta_{\iota 4}=\theta_{4\iota}$ すなわち (233) はエネルギーが慣性であるという Einstein の定理を示しているし，また角運動量の変化率が力のモーメントに等しいというよく知られた形の角運動量に関する定理 (245) が成立するためには，運動エネルギー・運動量テンソルの空間部分が対称であることが必要欠くべからざる条件である．このように運動エネルギー・運動量テンソルが対称であることは非常に重要な性質である．

運動エネルギー・運動量テンソルは，次の関係式を満たしている．

$$\theta_{ik}U_k=\mu^0 U_i U_k U_k=-\mu^0 c^2 U_i=-h^0 U_i. \tag{246}$$

ここに h^0 は静止系におけるエネルギー密度である．

第 V 章

真空中の電磁力学

52. 真空中における電磁力学の基礎方程式．4元電流密度

第 III 章で述べたように，力学の基礎方程式を相対性原理と調和させるためには，それに変更を加えなければならなかった．ところが真空中における電磁力学の方程式，すなわち Maxwell の方程式の場合にはその必要がない．これから述べるようにこれ等はすでに Lorentz 変換に対して共変的になっている†.

相異なる2つの慣性系 S および S' 内に実験室を構え，各々独立に電磁的な実験を行う2群の実験物理学者達を考えることにしよう．S 系にいる物理学者達は，荷電物体や磁針を試験体として普通の方法で電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{H}$ を S 系での時空座標 $\boldsymbol{x}$ と t の函数として決定することができる．同様な方法で，S' 系にいる物理学者達も電場 $\boldsymbol{E}'$ および磁場 $\boldsymbol{H}'$ を S' 系の時空座標 $\boldsymbol{x}', t'$ の函数として決定することができる．さらにこれら2組の物理学者達は，互に独立に S および S' 系で荷電密度 ρ, ρ' を決定することができる．この章では真空中の電磁現象だけを考えることにしよう．この場合には，導体や誘電体も磁性体も存在しないから，電流としては，この場合，携帯電流だけしか存在しない．したがって S および S' 系での電流密度は $\rho\boldsymbol{u}$ および $\rho'\boldsymbol{u}'$ である．ただし $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{u}'$ は，それぞれ S および S' 系における運動する荷電の速度である．ここに導入した量はみな S および S' 系の時空座標の函数である．

さて相対性原理によれば，電磁場を荷電分布の函数として決定する方程式は，S と S' とで同じ形をとらなければならない．したがって，2組の物理学者達は，彼らの実験からの結論として，真空中の Maxwell-Lorentz の場の方程式に到達するであろう．したがって，S 系では，Heaviside 単位系で

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0, \qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0, \tag{1 a}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\rho, \qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\rho\boldsymbol{u}}{c} \tag{1 b}$$

がえられ，S' 系では (1) のすべての量にダッシュをつけた式がえられる．(1) は Lorentz の古典電子論の基礎方程式そのものである．

† H. Poincaré, *C. R.* **140**, 1504 (1905): *Rend. Pal.* **21**, 129 (1906); A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **17**, 891 (1905); H. Minkowski, 第4章133頁の参考書を見よ．

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}'$ の関係は (II. 55) で与えられるが ρ と ρ' の関係や $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ の間の関係についてはまだ何も知っていない．しかし，荷電が保存されることは，最も基礎的な実験結果の1つである．このことは (IV. 207) と同様に，連続方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{2}$$

で表わすことができる．この式は Maxwell の方程式 (1 b) から直ちにえられる結果の1つである．また S' 系でもこれと同じ方程式

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\operatorname{div}'(\rho'\boldsymbol{u}')=) \tag{2'}$$

がえられなければならぬことも明らかである．そこで，ρ と ρ' の関係としては，荷電や電流の分布がどのようなものであろうとも，(2′) が常に (2) から導かれるようなものでなければならない．S 系で4つの成分

$$s_i=\left(\frac{\rho\boldsymbol{u}}{c},\ i\rho\right) \tag{3}$$

を有する量を定義する．S' 系でも同じく s_i' を定義する．そのときは (2) および (2′) は次のように書くことができる．

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_i}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial s_i'}{\partial x_i'}=0. \tag{4'}$$

附録2に示すように，もし荷電や電流がどのような分布をしている場合でも (4′) が (4) から導き出されるためには s_i の s_i' 関係は

$$s_i'=\alpha_{ik}s_k \tag{5}$$

で与えられなければならない．ここで α_{ik} は S 系と S' を結ぶ座標の変換係数 (IV. 3) である．したがって，s_i は1つの4元ベクトルである．これを4元電流密度と云う．そして (4) はこの4元電流密度の発散が恒等的に零であることを表わしている (IV. 178 参照)．

不変量

$$s_is_i=s_i's_i' \tag{6}$$

に -1 をかけ，(3) を代入すれば，

$$\rho^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\rho'^2\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)=\rho^{02} \tag{7}$$

という不変量がえられる．ρ^0 は静止系 S^0 における荷電密度である．故に

$$\rho=\frac{\rho^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{8}$$

がえられる．(8) により，(3) は

$$s_i = \frac{\rho^0 U_i}{c} \tag{9}$$

なる形に書ける．U_i は (IV. 39) で定義した4元速度である．(9) 式は固有質量の4元的流れの密度に対する (IV. 209) 式と全く類似なものである．

さて，物質の体積 δV がになう荷電 $\rho\delta V$ について考える．静止系におけるその体積を δV^0 とすれば $\delta V = \delta V^0 \sqrt{(1-u^2/c^2)}$ であり，これと (8) を一しょに用いれば，

$$\rho\delta V = \rho^0 \delta V^0 \tag{10}$$

をえる．

故に，物質のある体積が荷う荷電量は1つの不変量である．したがってある物体の荷う全電気量も1つの不変量である．電気量が不変量であるというこの重要な定理は，このように連続方程式が任意の慣性系で成り立っているということからえられる結論の1つである．電気量が不変量であるということがもっともらしいことは，次のような推論からも明らかである．はじめ S 系で静止している荷電が e の荷電粒子を考えよう．これに力が作用して，この粒子の速度が，S' 系が S 系に対して有する速度 $\boldsymbol{v}$ に等しくなるまで，加速されたとする．この加速される間，粒子の荷電には変りがないから，この粒子は S 系に対しては同じく荷電 e を有しているであろう．一方この粒子は今度 S' 系に対して静止しており，S' に対する事情はすべて，もと S に対しての事情と全く同じであるから，S' に対するこの粒子の荷電 e' は，S に対する一定の荷電 e に等しいと見なさなければならぬ．故に常に $e'=e$ でなければならぬことになり，これは (10) の示すところに一致する．

53. Lorentz 変換における電磁力学の基礎方程式の共変性．電磁場テンソル

任意の慣性系 S において

$$\left.\begin{aligned} F_{ik} = -F_{ik}, \qquad & (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \boldsymbol{H}, \\ & (F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i\boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

すなわち

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

によつて定義された F_{ik} を用いると，方程式 (1 a) は次のように表わされる．

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0. \tag{13}$$

方程式 (13) の左辺は 3 つの指標 i, k, l について反対称の形になっているから，(13) によって表わされる互に独立な方程式は 4 個である．この 4 個の方程式は，たとえば (i, k, l) をそれぞれ (1, 2, 3), (4, 2, 3), (4, 3, 1), (4, 1, 2) とおいたものである．この 4 個の方程式が (1 a) の 4 個の方程式と同等であることを証明することはやさしい．

方程式 (4) がどの慣性系においても正しいことから，s_i が 4 元ベクトルの成分になっていることが断定できた．同様に，方程式 (13) がどの慣性系においても常に正しいならば (これは当然の要請であるが)，F_{ik} は反対称テンソルの成分として変換されなければならないことになる．このように定義されたテンソル F_{ik} は電磁場テンソルとよばれる．方程式 (13) すなわち (1 a) はテンソル F_{ikl} の回転 (curl) が零になることを表わしている (IV. 184 を参照)．

F_{ik} を表わした式 (12) において $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}$ とおきかえれば，F_{ik} に対隅な擬テンソル F^*_{ik} がえられる．(IV. 187) によって，方程式 (13) はこの F^*_{ik} を用いれば

$$\mathrm{div}_i\, F^*=\frac{\partial F^*_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{14}$$

で表わすこともできる．

F_{ik} と $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ を結ぶ関係式 (11) は (IV. 80, 80′) の関係式と全く同じであるから，純粋の空間的な変換に対しては $\boldsymbol{E}$ は極性ベクトル，$\boldsymbol{H}$ は軸性ベクトルとしてふるまう．回転を伴わない一般の Lorentz 変換に対しては，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ の変換公式は (IV. 81′) になる．この変換公式を書き改めれば

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&=\frac{\boldsymbol{E}+\dfrac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\left\{\sqrt{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}-1\right\}+\dfrac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})}{\sqrt{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}}\\ \boldsymbol{H}'&=\frac{\boldsymbol{H}+\dfrac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})\left\{\sqrt{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}-1\right\}-\dfrac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})}{\sqrt{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

電磁場は，その測定に用いられる器具の制約によって，電場と磁場に分けられているが，このように分けることは何ら絶対的な意味をもっていない．例えば，S 系で見れば電場のみが存在する場合，すなわち $\boldsymbol{H}=0$ でも，S' 系においては磁場 $\boldsymbol{H}'\neq 0$ が現われることは，(15) 式より明らかである．上述のことは，

物理的に考えて見ても当然なことである．すなわち，S系において電場のみが存在するということは，電荷全体がS系に対して静止していることである．したがってS'系に対しては，電荷はすべて$-\boldsymbol{v}$の速度で運動していることになる．この結果，S'系においては，定常電流が流れ，このために磁場が生ずることになる．

Maxwell の方程式 (1 b) の第 2 式は，(3) および (12) 式を用いれば，次のように書かれる．

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=s_i. \tag{16}$$

(16) 式の左辺は電磁場テンソルの発散 (IV. 183) 式参照) になっているから，(16) 式の左右両辺は共に 4 元ベクトルとして変換する．このように，方程式 (1 b) の共変性は，方程式 (1 a) の共変性および連続方程式 (4) の共変性から導かれるものである．このことは，(1 b) 式の正当性を支持する強力な理由になっている．そして Maxwell の変位電流

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

が方程式 (1 b) の共変性に是非必要な項であることがわかる．

ベクトル方程式 (16) の発散を作れば，電磁場テンソルの反対称性から

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}\equiv 0. \tag{17}$$

をえる．これは連続方程式 (4) そのものである．

54. 4 元ポテンシャル．ゲージ変換

よく知られているように，(1 a) 式の結果として，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H}=\text{curl}\,\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E}=-\text{grad}\,\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{18}$$

の形に書くことができる．ここでベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ およびスカラー・ポテンシャル ϕ は，Lorentz の条件

$$\text{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0 \tag{19}$$

を満足するように選ぶことができる．

このことは，どんな慣性系でも実行できることである．そこで，各慣性系で 4 成分の量

$$A_i=(\boldsymbol{A}, i\phi) \tag{20}$$

を定義すれば (18) と (19) は,

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0 \tag{22}$$

と書くことができる.

F_{ik} は1つのテンソルであるから, A_i が4元ベクトルの成分のように変換されるように, 各慣性系のポテンシャルを選ぶことができるはずである. このように選ばれた A_i を4元ポテンシャルという. (21) および (22) によれば, 電磁場テンソルは, 4元ポテンシャルの回転に等しく, 4元ポテンシャルの発散は零である. さらに (IV.184—186) からわかるように, Maxwell 方程式 (13) は, (21) 式によって恒等的に満足される.

F_{ik} が与えられた場合にも, 4元ポテンシャルは (21) から一意的には決まらない. なぜならば A_i が (21) を満足するならば, 任意のスカラー ψ を用いてつくった函数

$$A_i^*=A_i+\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \tag{23}$$

も (21) を満足するからである.

変換 (23) をゲージ変換という. 測定できる量である F_{ik} は, このような変換を行っても不変である. Lorentz 条件は許されるゲージ変換の範囲を制限はするが, それにしても, この制限を満足するような4元ポテンシャルは非常に多数存在するのである. (23) を (22) に代入すれば

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_i}=\Box\psi=0 \tag{24}$$

という ψ に対する制限がえられるが, (24) の任意の解の1つを ψ とすれば, A_i が (21), (22) を満たすならば A_i^* も, やはり (21), (22) を満たす.

(21) を (16) に代入すれば, (22) を使って

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k\partial x_k}=-s_i, \tag{25}$$

あるいは

$$\Box A_i=-s_i \tag{26}$$

をえる.

(26) の解であって同時に (22) を満たすようなものから, (21) によって Maxwell 方程式 (13) および (16) の解がえられる.

55. 4元ポテンシャルの4次元積分表示

方程式 (25) は (3+1) 空間におけるポテンシャル方程式の通例の形式になっている．そこでこの方程式の解は3次元において用いる方法をそのまま用いればえられる†.

われわれは先ず第一に，4次元空間が Euclid 空間，すなわち4個の座標がすべて実数であるとして方程式 (25) の解を求めてみる．

いま，固定点 P (その座標を $x_i(P)$ とする) と任意の点 (座標 x_i) とを結ぶ4元ベクトルを R_i とする．

$$R_i = x_i - x_i(P). \tag{27}$$

R^2 で，この2点間の距離の2乗 (R_iR_i) を表わせば，$x_i \neq x_i(P)$ であるかぎり

$$\Box\frac{1}{R^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\frac{1}{R^2} = 0 \tag{28}$$

が成立する．この計算は簡単である．さらに $\psi(x)$ および $\phi(x)$ を $(x)=(x_i)$ の正則函数とすれば

$$\phi\Box\psi - \psi\Box\phi = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right).$$

この式において ψ として $1/R^2$ をとり，ρ を中心とし，半径が a である (3次元的) 球

$$R^2 = R_iR_i = (x_i - x_i(P))(x_i - x_i(P)) = a^2 \tag{29}$$

の外側の4次元的空間の全部にわたって積分する．このさい，積分変数として x_i の代りに $R_i = x_i - x_i(P)$ を用いれば，$\Box\frac{1}{R^2} = 0$ であるから

$$-\int\frac{1}{R^2}\Box\phi\, dx_1dx_2dx_3dx_4$$

$$= \int\frac{\partial}{\partial R_k}\left(\phi\frac{\partial}{\partial R_k}\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial\phi}{\partial R_k}\right)dR_1dR_2dR_3dR_4 \tag{30}$$

がえられる．ただし積分は

$$R^2 = R_iR_i \geqq a^2 \tag{31}$$

をみたす4次元的空間の区域にわたって行なわれるべきものである．

式 (30) の右辺の被積分項は，偏微分係数の和であるから，函数 ϕ が無限遠において十分すみやかに零に収斂するならば，積分は球 (29) 上の3次元的な積分に変換することができる．たとえば式 (30) の第1項 $\int\frac{\partial}{\partial R_1}\left(\phi\frac{\partial}{\partial R_1}\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial\phi}{\partial R_1}\right)dR_1dR_2dR_3dR_4$ は

† A. Sommerfeld, *Ann. d. Phys.* **33**, 649 (1910)

$$\int\left[-\left(\phi\frac{\partial}{\partial R_1}\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial\phi}{\partial R_1}\right)^+ +\left(\phi\frac{\partial}{\partial R_1}\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial\phi}{\partial R_1}\right)^-\right]dR_2dR_3dR_4 \tag{32}$$

となる，ここで積分は球 (29) の表面にわたって行なわれる．(32) 式中の $(\quad)^+$, $(\quad)^-$ はそれぞれの括弧内の函数中の変数 R_1 として

$$R_1=\pm\{a^2-(R_2^2+R_3^2+R_4^2)\}^{1/2}=\pm(a^2-\rho_1^2)^{1/2}. \tag{33}$$

(33) 式で与えられる値をとるべきであることを表わしている．また変数 R_2, R_3, R_4 の積分領域は，不等式

$$\rho_1^2\equiv R_2^2+R_3^2+R_4^2\leqslant a^2 \tag{34}$$

によって定義される領域である．

式 (30) の右辺の $k=2, 3, 4$ に対応する3つの項の変換は，(32) 式中の指標 (1, 2, 3, 4) を cyclic に置換すればえられる．(式 (30) で行なった変換が，ちょうど3次元空間における Green の定理に対応している)．

次に球の半径 a を零に近づける．このとき (32) 式の3次元的積分領域の体積は a^3 の order で零に近づく．括弧 $(\quad)^\pm$ の中では $\frac{1}{R^2}=\frac{1}{a^2}$ であるから，括弧の中の第2項は零に近づく．そして

$$\frac{\partial}{\partial R_k}\frac{1}{R^2}=-\frac{2R_k}{R^4} \tag{35}$$

が成立するから，(33) 式を用いれば a を零に近づけた極限においては，(32) 式は

$$2\phi(P)\int\frac{2\sqrt{(a^2-\rho_1^2)}}{a^4}dR_2dR_3dR_4 \tag{36}$$

となる．ここに $\phi(P)$ は点 P における函数 ϕ の値を意味する．また積分領域 (34) は球 $\rho_1^2=a^2$ の内部である．指標 1, 2, 3, 4 を cyclic に置換してえられる残りの3項が第1項に等しくなることは明らかである．したがって積分に極座標を導入すれば，(30) の右辺として

$$16\phi(P)\frac{4\pi}{a^4}\int_0^a\sqrt{(a^2-\rho_1^2)}\rho_1^2d\rho_1=4\pi^2\phi(P) \tag{37}$$

がえられ，(30) は

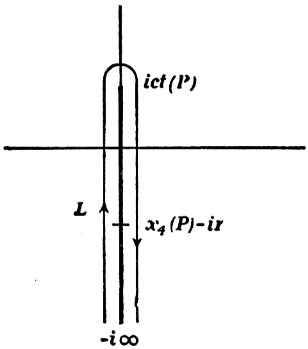
$$4\pi^2\phi(P)=-\int\frac{1}{R^2}\Box\phi d^4x \tag{38}$$

となる．ただし d^4x は $dx_1dx_2dx_3dx_4$ の略号である．この関係式は，ϕ が正則函数であれば常に成立する．特に ϕ が (26) 式をみたす函数 A_i であれば，

$$4\pi^2 A_i(P)=\int \frac{s_i^2}{R^2}d^4x \tag{39}$$

がえられる．この結果，各点における 4 元電流密度 s_i の値がわかっておれば，4 次元空間内の任意の点における A_i の値を計算すをことができる．

これまで変数 x_i のすべてを実数として話を進めてきたが，現実の物理の問題においては，4 元電流密度 s_i は x_4 の実数値に対してではなく，$t(P)$ より小さい t に対応する虚数値 x_4 に対して与えられている．すなわち s_i は x_4 の複素平面上の虚軸上，第 13 図に示す太線部分においてのみ与えられている．そこで (39) 式の右辺の被積分項中の函数 s_i に解析接続を施すことによって，実軸に沿っている積分路を，虚軸上の s_i が与えられている部分を囲む閉曲線 L に変形する．このようにしても積分 (39) は依然として方程式 (26) の解である．



第 13 図

$$\frac{\partial}{\partial x_i(P)}\frac{1}{R^2}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{R^2} \tag{40}$$

であるから，(39) 式において $A_i(P)$ の発散を作り，ついで右辺に部分積分を用いて，(4) を適用すれば

$$4\pi^2\frac{\partial A_i(P)}{\partial x_i(P)}=-\int s_i\frac{\partial(1/R^2)}{\partial x_i}d^4x=\int\frac{\partial s_i}{\partial x_i}\frac{1}{R^2}d^4x=0, \tag{41}$$

このようにして解 (39) もまた Lorentz の条件 (22) をみたすことがわかる．

式 (21), (39), (40) および (35) から電磁場テンソル $F_{ik}(P)$ として

$$2\pi^2 F_{ik}(P)=\int\frac{R_i s_k-R_k s_i}{R^4}d^4x \tag{42}$$

がえられる．

56. 遅滞 (retarded) ポテンシャル．点電荷による Liénard-Wiechert のポテンシャル

(39) の積分を実行する場合，積分の順序は勝手でよい．そこで先ず (x_1, x_2, x_3) を一定にしておいて，変数 x_4 について，第 13 図の積分路 L に沿う積分から実行することにしよう．事象点 (x_i) および $(x_i(P))$ に対応する空間点 $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{x}(P)$ の間の空間的な距離を $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(P)|$ とすれば，

$$R^2=r^2+(x_4-x_4(P))^2=(x_4-x_4(P)+ir)\times(x_4-x_4(P)-ir). \tag{43}$$

したがって，$\dfrac{1}{R^2}$ なる量は，x_4 の函数として，ループ L の内部の1点，すなわち

$$x_4=x_4(P)-ir \tag{44}$$

なる x_4 の複素平面上の1点に極をもつ．(39) の被積分函数はこの点以外に，L の内部に極をもたないから，この積分路は点 (44) をまわる1周積分路にちぢめることができる．そうすれば Cauchy の定理により，

$$\int_L \frac{s_i}{R^2}dx_4=-\frac{2\pi_i s_i}{x_4-x_4(P)-ir}\bigg|_{x_4=x_4(P)-ir}=\pi\frac{s_i\left(\boldsymbol{x},t(P)-\dfrac{r}{c}\right)}{r}, \tag{45}$$

をえる．

したがってポテンシャル (39) は

$$4\pi A_i(P)=\int\frac{s_i(\boldsymbol{x},t(P)-r/c)}{r}dV \tag{46}$$

なる形をとる．ここでこの積分は普通の3次元空間について行うべきものである．被積分函数中 s_i は時刻 $t(P)$ の値をとらずに，時刻 $t(P)-\dfrac{r}{c}$ における値をとらなければならない．このことは，電磁的な攪乱が光速度 c で伝わることに相応している．それで (46) のポテンシャルを遅滞ポテンシャル (retarded potentials) という．もし (39) と (45) で積分を，L を点 $x_4=ict(P)$ に関して反転してえられる曲線にそって行ったとすれば前進ポテンシャル (advanced potentials) と云われている (26) の別の解がえられる．この解はある時刻にある点におけるポテンシャルと未来における荷電および電流密度を関係づけるものであって，通常直接の物理的な応用をもっていないものである．

さて勝手な運動をしている点荷電 e によるポテンシャルについて考えよう．点荷電の座標 x_ι は t の函数

$$x_\iota=x_\iota(t) \tag{47}$$

で与えられているとする．このとき4元ポテンシャルは，(46) からえられる．しかし (46) の s_i は，遅れた時間変数のため積分変数のやや複雑な函数であるから，この場合，(39) 式までもどって考える方が容易である．ここで今度先ず空間座標に関する積分から実行する．(47) を満足する点以外の場所では s_i は

零であるから，(3) と (IV. 39) から

$$\int \frac{s_i}{R^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{eu}{c}, ie\right) = \frac{e}{c}\left\{1 - \frac{u^2}{c^2}\right\}^{1/2} \frac{U_i}{R^2} \tag{48}$$

をえる．$u=(dx_i/dt)$ は (47) で与えられる点電荷の速度であり U_i はその 4 元速度である．また

$$R^2 = (x_i(t) - x_i(P))(x_i(t) - x_i(P)) - c^2(t - t_p)^2$$
$$= r^2 + (x_4 - x_4(P))^2$$

である．これらは t あるいは純虚数 x_4 の函数であるが，解析接続により，これを x_4 面上虚数軸外でも定義することができる．このようにして (39) から，

$$4\pi^2 A_i(P) = \frac{e}{c}\int_L \frac{\sqrt{(1-u^2/c^2)}U_i}{R^2} dx_4 \tag{49}$$

をえる．この被積分函数も複素面上の点 (44) に極を有し，この x_4 の値附近で分母は

$$R^2 = \frac{dR^2}{dx_4}(x_4 - x_4(P) + ir)$$

という形をもつ．ここで，函数

$$\frac{dR^2}{dx_4} = 2R_k \frac{dR_k}{dx_4} = 2R_k U_k \frac{d\tau}{dx_4} = 2R_k U_k \frac{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}{ic} \tag{50}$$

および $r(t)$ 中の x_4 の値としては，$x_4 - x_4(P) + ir = 0$ を満足するような x_4 の値をとらなければならない．

そこで Cauchy の定理を用いることにより，われわれは

$$4\pi A_i(P) = \frac{eU_i}{U_k R_k} \tag{51}$$

をえる†．ここで (R_k) は事象点 P から，点電荷の世界線

$$x_i = x_i(\tau) \tag{52}$$

が点 P を頂点とする光円錐

$$R^2 \equiv R_i R_i = 0 \tag{53}$$

の過去側の部分と交る点 Q へ引いた 4 元ベクトルを表わす．

P から Q へ向う 4 元ベクトル (R_i) の空間部分を $\boldsymbol{r}$ とすれば，(51) の分母は (IV. 39) と (44) により

$$U_i R_i = \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} + \frac{ic(x_4 - x_4(P))}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} = \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}) + rc}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{54}$$

となる．このようにして (51) 式は

† H. Minkowski, 第 IV 章 133 頁の参考文献を見よ．

$$\left.\begin{aligned} 4\pi \boldsymbol{A}(P) &= \left.\frac{e\boldsymbol{u}/c}{r+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})/c}\right|_{t(P)-r/c} \\ 4\pi\phi(P) &= \left.\frac{e}{r+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})/c}\right|_{t(P)-r/c} \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

と書くことができる．(55) 式は，運動する点荷電の Liénard-Wiechert のポテンシャルを表わしている．

(51) を用いて，事象点 P における電磁場テンソル $F_{ik}(P)$ を計算しようというとき，点 Q の固有時 τ が (53) あるいは (27) と (52) により

$$(x_i(\tau)-x_i(P))(x_i(\tau)-x_i(P))=0 \tag{56}$$

で定義される点 P の座標の函数であることに注意せねばならない．(56) を $x_k(P)$ について微分すれば，

$$R_i\left(\frac{dx_i}{d\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x_k(P)}-\delta_{ik}\right)=0,$$

あるいは

$$\frac{\partial\tau}{\partial x_k(P)}=\frac{R_k}{R_iU_i} \tag{57}$$

をえる．したがって (21), (52) から

$$4\pi F_{ik}(P)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{eU_k}{U_lR_l}\right)\frac{R_i}{U_mR_m}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{eU_i}{U_lR_l}\right)\frac{R_k}{U_mR_m}$$

あるいは，(IV. 41) を用いて

$$\begin{aligned} 4\pi F_{ik} &= \frac{e}{(U_lR_l)^2}\left(R_i\frac{dU_k}{dr}-R_k\frac{dU_i}{dr}\right)+ \\ &\quad +\frac{e}{(U_lR_l)^3}\left(c^2-R_m\frac{dR_m}{d\tau}\right)(R_iU_k-R_kU_i) \end{aligned} \tag{58}$$

がえられる．(58) 式は，(42) で先ず空間座標について積分し後 x_4-面上の曲線 L にそう積分を Cauchy の定理を実行することによってもえられる．しかし，この場合には，$\dfrac{1}{R^3}$ なる函数が点 (44) に 2 次の極を有することに注意せねばならぬ．

(58) によれば F_{ik} は

$$4\pi F_{ik}=R_ia_k-R_ka_i \tag{59}$$

なる形をしているから，(IV. 110, 111) により，

$$F_{ik}F^*_{ik}=0 \tag{60}$$

である．ただし a_i は 4 元ベクトル，F^*_{ik} は F_{ik} に対隅な擬テンソルである．これは (12) におきかえ $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{E})\to(-\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ を行ってえられる．したがって (60) は

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})=0 \tag{61}$$

という式と同等である.

このように電場ベクトルと磁場ベクトルは，あらゆる慣性系内のあらゆる点で互に直交している．さらに (12), (58), (53) を用いる簡単な計算から

$$(4\pi)^2F_{ik}F_{ik}=(4\pi)^2 2(|\boldsymbol{H}|^2-|\boldsymbol{E}|^2)=\frac{-2e^2c^4}{(U_lR_l)^4} \tag{62}$$

であることがわかる．したがって不変量 $|\boldsymbol{H}|^2-|\boldsymbol{E}|^2$ はどのような運動点荷電の作る場についても負の値をとる．このことと (61) とから，任意の事象点 P において，この点の磁場がベクトルが全部零にするような慣性系を撰定することが常に可能なことがわかる．(15) で $\boldsymbol{H}'=0$ をえるには

$$\boldsymbol{v}=\frac{c(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})}{E^2} \tag{63}$$

ととればよい．(61) と (62) によれば

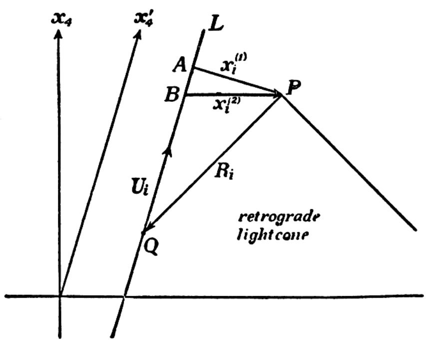
$$v=\frac{cEH}{E^2}=\frac{cH}{E}<c \tag{64}$$

であるから，$\boldsymbol{v}$ をこのようにとることは物理的に可能である．

57. 一様な運動をしている点電荷の場

この節では一定の速度で運動している点電荷の作る場を取り扱う．点電荷の4元速度 (一定である) を U_i とすると，この世界線は (3+1)-空間内の直線になり，その直線の方向は U_i によって定まる．$dU_i/d\tau=0$ であるから，(58) 式は簡単になって次式のようになる．

$$4\pi F_{ik}=\frac{ec^2}{(U_lR_l)^3}(R_iU_k-R_kU_i). \tag{65}$$



第 14 図

座標系 S の原点を適当に選べば，x_4-軸と世界線とが常に同一平面上にあるようにすることができる．第 14 図はこの平面を図示したものである．図において直線 L は粒子の世界線を表わしており，R は任意の点 P を頂点とする光円錐の過去側の部分 (retrograde cone) と世界線 L との交点を表わす．したがって R_i は図において P から Q に向うベクトルになって

いる．いま A を点 P の L 上への射影点とすれば A から P に向うベクトル $x_i^{(1)}$ は4元速度 U_i に直交する．また $x_i^{(1)}$ はベクトル $-R_i$ の直線 L に垂直な方向への射影になっている．この結果

$$x_i^{(1)}U_i=0, \qquad -x_i^{(1)}R_i=x_i^{(1)}x_i^{(1)} \tag{66}$$

が成立するから $x_i^{(1)}$ は次の形になる．

$$x_i^{(1)}=-R_i-\frac{U_i}{c^2}(U_lR_l). \tag{67}$$

(67) 式で与えられる $x_i^{(1)}$ がたしかに (66) の両式をみたすものであることは一見してわかる．(67), (53) 両式より

$$x_i^{(1)}x_i^{(1)}=\frac{(U_lR_l)^2}{c^2} \tag{67'}$$

がえられる．点電荷が静止している座標系 S' では，x_4'-軸は U_i すなわち世界線 L に平行である．S' 系では，事象点 P に対応する3次元空間の点 P' と点電荷を結ぶ空間ベクトルを $\boldsymbol{r}'$ とすれば，$x_i^{(1)}$ は

$$x_i^{(1)}=(\boldsymbol{r}', 0) \tag{68}$$

である．U_iR_i は不変量であるから，第4章の (39) 式と本章の (27), (44) 両式より

$$U_iR_i=U_i'R_i'=icR_4'=cr' \qquad (r'=|\boldsymbol{r}'|), \tag{69}$$

となる．この関係は (68) を (67′) に代入してえられるものと一致する．さらに (67) 式より

$$R_iU_k-R_kU_i=-(x_i^{(1)}U_k-x_k^{(1)}U_i),$$

が成立するから F_{ik} に関する (65) 式は次式のように表わされる．

$$4\pi F_{ik}=\frac{e}{cr'^3}(U_ix_k^{(1)}-U_kx_i^{(1)}), \tag{70}$$

L 上の**任意の**点から点 P に向うベクトルは a を任意定数とすればすべて

$$x_i=x_i^{(1)}+aU_1 \tag{71}$$

のように書けるから，(70) 式中のベクトル $x_i^{(1)}$ をこのベクトルで置き換えても (70) 式中の F_{ik} は変らない．第14図の線分 BP で示されているベクトルは座標系 S においてはその時間成分 $x_4^{(2)}$ が零であるようなベクトル $x_i^{(2)}$ である．したがって S 系では $x_i^{(2)}$ は

$$x_i^{(2)}=(\boldsymbol{r}, 0) \tag{72}$$

の形に書ける．ここで $\boldsymbol{r}$ は事象 P が起った時と**同時刻**の点電荷の位置から事象 P の起った点 P に引いた空間ベクトルである（したがってこの $\boldsymbol{r}$ は Liénard-Wiechert ポテンシャルに用いた $\boldsymbol{r}$ とは違う．Liénard-Wiechert ポテンシャ

ルの $\boldsymbol{r}$ はベクトル R_i の空間部分であった). そこで (71) の x_i として $x_i^{(2)}$ を用いれば

$$4\pi F_{ik}=\frac{e}{cr'^3}(U_i x_k^{(2)}-U_k x_i^{(2)}) \tag{73}$$

が成立し, (12), (72) および (IV. 39) を用いれば, これから電場ベクトル, 磁場ベクトルが次の形でえられる.

$$4\pi\boldsymbol{E}=\frac{e\boldsymbol{r}}{r'^3\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\qquad 4\pi\boldsymbol{H}=\frac{e}{cr'^3}\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}. \tag{74}$$

第 14 図からベクトル $x_i^{(2)}$ と $x_i^{(1)}$ とは S' 系では空間成分は同じで $\boldsymbol{r}'$ であることがわかる. そこで $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ とを結ぶ関係式は変換公式 (IV. 29) の逆変換を S 系での成分が $x^{(2)}=(\boldsymbol{r},0)$, S' 系での成分が $x_i'^{(2)}=(\boldsymbol{r}',x_4'^{(2)})$ であるベクトルに施せば直ちにえられる. S' 系の S 系に対する速度が $\boldsymbol{u}$ であるから, 求める関係式は

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{u}}{u^2}\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})(1-\sqrt{(1-u^2/c^2)})}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \tag{75}$$

となる. この結果から

$$r'=\left\{r^2+\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})^2}{c^2-u^2}\right\}^{1/2}. \tag{76}$$

ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ とをそれぞれ $\boldsymbol{u}$ に垂直な成分と平行な成分に分解すれば (75) は

$$r'_{\parallel}=\frac{r_{\parallel}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\qquad r'_{\perp}=r_{\perp} \tag{77}$$

のように書かれる. したがって $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ の間の関係式が $\boldsymbol{u}$ の方向における Lorentz 短縮に対応するものであることがわかる (II. 35 参照).

さて電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ は動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向を向き, 磁場ベクトル $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{u}$ にそれぞれ直交している. 式 (74) が (61) と (62) をみたすことは直ちにわかる. E^2-H^2 という量が一定の値をもつ面が回転楕円体であることは明らかで, これがいわゆる Heaviside 楕円体である. この楕円体は球 $r'=$一定に点電荷の運動方向の Lorentz 短縮を施せばえられる.

実は (74) という表わし方は, 電磁場ベクトルに変換公式 (VII. 81′) を施せばはるかに簡単に求めることができる. それを示そう. S' を点電荷の静止座標系とすれば, S' 系では電場は球対称になり, 磁場は 0 である. すなわち

$$4\pi\boldsymbol{E}'=\frac{e\boldsymbol{r}'}{r'^3},\qquad \boldsymbol{H}'=0. \tag{78}$$

よって (IV. 81′) と (78) より

$$4\pi\boldsymbol{E}=\frac{e}{r'^3}\frac{\boldsymbol{r}'+\dfrac{\boldsymbol{u}}{u^2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}')\left\{\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)}-1\right\}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)}},$$

$$4\pi\boldsymbol{H}=\frac{e}{c}\frac{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r}')}{r'^3\sqrt{(1-u^2/c^2)}}$$

がえられる．(75) の逆の関係式は

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}\frac{(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{u})}{u^2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}-1\right\} \tag{75'}$$

であるから (II. 35′ 参照)，一様な運動をしている点電荷の電磁場が (74) で与えられることを再び示したことになる．

この導き方から，静止系における荷電分布が球対称であるかぎり，球状荷電体の外部では (74) がどこでも成立することになる．この場合 $\boldsymbol{r}$ は球の中心からの距離，e は球の全電荷を表わしている．‘一様に加速されている’点電荷すなわち双曲線運動を行なっている点電荷 (§29 参照) の作る電磁場も同じようにして求めることができる．この場合にも取り扱う方法は2通りある．その1つは任意の運動をしている電荷について成立する関係式 (58) を直接用いる方法であり，他の1つは電荷と同じ運動をしている座標系 S^* を導入してこの座標系内で Maxwell の方程式を解き，その結果を変換法則によって S 系にもどすという方法である．ただこのときには座標系 S^* はもはや慣性系ではないので，これは任意の運動をしている座標系を使用できる一般相対性理論ができていないと使えない．この第2の方法を適用するさいに必要な手段は §97 と §115 において説明する．

58. 荷電物質に作用する電磁力

前節で導き出した式を用いて，任意の荷電分布および電流分布によって作られる場を計算することができる．ところで今度は逆に F_{ik} が与えられた場合，それが荷電物質の運動におよぼす影響について考えよう．先ずなさねばならぬことはある慣性系 S において速度 $\boldsymbol{u}$ で与えられた電磁場内を運動する荷電粒子 e に作用する力を決めることである．§29 に概略を述べた方法に従って，この粒子が瞬間的に静止しているような慣性系 S^0 を導入することにしよう．この系では，荷電粒子に作用する力 $\boldsymbol{F}^0$ は，S 系での電場ベクトル $\boldsymbol{E}^0$ の定義そのものから

$$\boldsymbol{F}^0=e\boldsymbol{E}^0 \tag{79}$$

でなければならない．(III. 43) に (79) を代入し S に対する S^0 の速度が粒子

の速度 $\boldsymbol{u}$ に等しいことに注意すれば，電磁場ベクトルの変換式 (15) により，S 系における力 $\boldsymbol{F}$ に対する Lorentz の式

$$\boldsymbol{F}=e\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\right] \tag{80}$$

がえられる．この式は，ほかに仮定をしなくても，このようにして相対性原理から導かれるものである．

4 次元的表現を用い，Minkowski の 4 元力の式をきめることを試みれば，もっと簡単に上の式を導くことができる．いま考えている場合には固有質量は保存され，したがって 4 元力は (IV. 54) で定義されるから静止系では

$$F_i^0=(\boldsymbol{F}^0, 0) \tag{81}$$

である．

粒子の 4 元速度を U_i とすれば，

$$\frac{e}{c}F_{ik}U_k \tag{82}$$

を 4 つの成分とする 4 元ベクトルを作ることができる．静止系では

$$U_i^0=(0, 0, 0, ic) \tag{83}$$

であるから，4 元ベクトル (82) は，S^0 系では (12) により

$$\frac{e}{c}F_{ik}^0U_k^0=(e\boldsymbol{E}^0, 0) \tag{84}$$

となる．(79), (84), (81) から 4 元ベクトル F_i と (82) の成分は静止系で相等しいことがわかる．そしてある座標系で成分が相等しい 2 つの 4 ベクトルは全く相等しい．したがって，任意の座標系で

$$F_i=\frac{e}{c}F_{ik}U_k \tag{85}$$

でなければならない．

$F_{ik}=-F_{ki}$ であるから，

$$F_iU_i=\frac{e}{c}F_{ik}U_iU_k\equiv 0 \tag{86}$$

となり，これは (IV. 57) に一致する．そして粒子の運動方程式は，(IV. 56) および (85) により

$$m_0\frac{dU_i}{d\tau}=\frac{e}{c}F_{ik}U_k \tag{87}$$

で与えられる．(12) と (IV. 39) を用いて，(85) の F_i の成分を計算すれば，(IV. 54) で $\boldsymbol{F}$ として Lorentz の式 (80) を用いたものがえられる．

さて今度は与えられた外場の中にある連続的に分布する荷電物質を考え，そ

の4元電流密度を

$$s_i=\left(\frac{\rho \boldsymbol{u}}{c}, i\rho\right)=\frac{\rho_0 U_i}{c} \tag{88}$$

とする．そこで，(IV. 214) で定義された4元的な力の密度 f_i の式を見出すことを問題にする．この問題は上と同様な線をたどって解くことができる．

ある時刻に空間の1定点について考える．この点にある物質はある速度で運動している．この点における物質が瞬間静止している慣性系を S^0 とする．そのときは S^0 系での s^i の成分は $s_i^0=(0,0,0,i\rho^0)$ である．また4元ベクトル

$$F_{ik}s_k \tag{89}$$

の成分は，

$$F_{ik}^0 s_k^0=(\rho^0 \boldsymbol{E}^0, 0) \tag{90}$$

である．これらの成分は S^0 における4元力の成分 (IV. 214) すなわち

$$f_i^0=(\boldsymbol{f}^0, 0) \tag{91}$$

に等しい．なんとなれば，静止系で力の密度は電場ベクトルの定義により

$$\boldsymbol{f}^0=\rho^0 \boldsymbol{E}^0 \tag{92}$$

で与えられなければならないからである．

したがってどの座標系でも，4元的な力の密度は，4元ベクトル (89) に等しくなければならない，すなわち

$$f_i=F_{ik}s_k \tag{93}$$

である．

(IV. 214), (93), (88) および (12) から，直ちに力の密度に対する Lorentz の式

$$\boldsymbol{f}=\rho\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{u}\times \boldsymbol{H})\right] \tag{94}$$

がえられる．さらに場のテンソルが反対称であることから，

$$f_i U_i=F_{ik}s_k U_i=\frac{\rho^0}{c}U_i F_{ik} U_k\equiv 0 \tag{95}$$

がえられる．§50 で論じたように，これは，この場合，固有質量が保存されることを示している．したがって運動方程式は (IV. 215) のような簡単な形

$$\mu^0 \frac{dU_i}{d\tau}=f_i \tag{96}$$

をとることになる．

59. 電磁力学の変分原理

Weyl と Born によって定式化された変分原理を用いれば，これから Max-

well の場の方程式および運動方程式 (96) を共に導くことができることを示そう.

A_i を4元ポテンシャルとして F_{ik} を

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

で定義すれば Maxwell の方程式の第1組 (13) は恒等的に成立する. (98) 式で定義された L を (3+1) 空間内の領域 Ω について積分した積分量

$$L=\int_\Omega \mathscr{L} d\Sigma \tag{97}$$

は Lorentz 変換に対して不変な積分量である. ここに $\mathscr{L}$ は

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}+A_is_i-\mu^0c^2=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)$$
$$+A_is_i-\mu^0c^2 \tag{98}$$

で, (98) 式中の s_i は4元電流密度, μ^0 は静止系における質量密度で μ^0 は不変量である.

さて函数 $A_i(x)$ の変分を δA_i とする. ただし領域 Ω の境界においては $\delta A_i=0$ とし, またこの変分のさい s_i と μ^0 は一定に保っておく. $\delta\frac{\partial A_i}{\partial x_k}=\frac{\partial\delta A_i}{\partial x_k}$ であるから, Lの変分 δL は部分積分法によって (99) 式になる.

$$\delta L=\int\delta\mathscr{L}d\Sigma=\int\left(F_{ik}\frac{\partial\delta A_i}{\partial x_k}+\delta A_is_i\right)d\Sigma$$
$$=\int\left(-\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}+s_i\right)\delta A_i d\Sigma. \tag{99}$$

$A_i(x)$ の任意の変分 δA_i に対応するLの変分が零であるという条件

$$\delta L=0 \tag{100}$$

から方程式

$$-\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}+s_i=0$$

がえられるが, これは Maxwell の方程式の第2組 (16) そのものである.

次に A_i を一定に保ちながら物質の世界線を変化させる変分を行なってみる. この場合には, 変分によって変わるのは (98) 式中の最後の2項 A_is_i と $-\mu^0c^2$ である. 無限小の体積 dV をもつある微小物質片に着目する. この小片の各点の世界線は無限に薄い管を形成している. 固有時を τ で表わし, $x_i=x_i(\tau)$ を

† H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*, Berlin, 1918. および M. Born, *Ann. d. Phys.* 28, 571 (1909)

この粒子の時空座標とすれば，粒子の 4 元速度 U_i，4 元電流密度 s_i は

$$U_i=\frac{dx_i}{d\tau},\qquad s_i=\frac{\rho^0 U_i}{c}=\frac{\rho^0}{c}\frac{dx_i}{d\tau}$$

で与えられる．(97) 式中の領域 Ω として上述の世界線の作る管をとり，この両端の値を τ_1, τ_2 $(\tau_1<\tau<\tau_2)$ として $\tau=\tau_1$, $\tau=\tau_2$ において $\delta x_i=0$ を満足するような世界線についての変分を行なう．粒子の静止体積を dV_0 と書けば

$$d\Sigma=\frac{1}{i}dVdx_4=cdV^0d\tau$$

であるから，次のような関係式が成立する．

$$\int(A_is_i-\mu^0c^2)d\Sigma=\int\left(A_i\rho^0dV^0\frac{dx_i}{d\tau}-\mu^0dV^0c^3\right)d\tau$$
$$=de\int_{\tau_1}^{\tau_2}A_i\frac{dx_i}{d\tau}d\tau-c^3dm^0\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau. \tag{101}$$

ここに $dm^0=\mu^0dV^0$ は粒子の静止質量，$de=\rho^0dV^0$ は粒子の電荷を表わしており，この 2 量はどちらもこの世界線の作る管上では一定である．

$d\tau$ の定義を考えれば，上述の変分 $\delta x_i(\tau)$ による (101) 式の後の積分の変分は

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau=\frac{1}{c^2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{dU_i}{d\tau}\delta x_id\tau \tag{102}$$

となる（これについては §91，242 頁を見よ）．

(101) 式の始めの積分の変分は

$$\delta\frac{dx_i}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\delta x_i,\qquad \frac{dA_i}{d\tau}=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{d\tau}=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}U_k$$

を用いて次のように変形される．

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}A_i\frac{dx_k}{d\tau}d\tau=\int\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x_k\frac{dx_i}{d\tau}+A_i\frac{d\delta x_i}{d\tau}\right)d\tau$$
$$=\int\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}U_k-\frac{dA_i}{d\tau}\right)\delta x_id\tau=\int\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)U_k\delta x_id\tau$$
$$=\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_{ik}U_k\delta x_id\tau. \tag{103}$$

(98)，(101)，(102) および (103) 式をまとめれば，この場合の L の変分として次式がえられる．

$$\delta L=c\int\left(\frac{\rho^0}{c}F_{ik}U_k-\mu^0\frac{dU_i}{d\tau}\right)\delta x_idV_0d\tau$$
$$=c\int\left(f_i-\mu^0\frac{dU_i}{d\tau}\right)\delta x_idV_0d\tau. \tag{104}$$

したがって物質の世界線のみを変化させる変分において $\delta L=0$ という条件から

$$\mu_0\frac{dU_i}{d\tau}=f_i$$

が導かれ，これは各部分が互に他に影響を及ぼしあわない荷電物質の運動方程式 (96) にほかならない．

60. 電磁エネルギー・運動量テンソル

4 元的な力 (93) が，Maxwell の方程式によって，ある対称テンソルの発散として表わされることを示そう．(16) を (93) に代入すれば

$$f_i=F_{il}s_l=F_{il}\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_k}=\frac{\partial(F_{il}F_{lk})}{\partial x_k}-\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{lk}$$

をえる．さらに (13) と F_{ik} の反対称性を用いて

$$\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{lk}=\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l}F_{lk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l}\right)F_{lk}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_i}F_{lk}=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{lk}F_{lk})$$

と書くことができる．したがって f_i を

$$f_i=-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{105}$$

の形に書くことができる．ただし，

$$S_{ik}=F_{il}F_{kl}-\delta_{ik}\frac{1}{4}(F_{lm}F_{lm}). \tag{106}$$

テンソル算法の規則から云って，S_{ik} は 1 つの対称テンソルで

$$S_{ik}=S_{ki} \tag{107}$$

で，恒等式

$$S_{ii}=F_{il}F_{il}-4\cdot\frac{1}{4}(F_{lm}F_{lm})\equiv 0. \tag{108}$$

を満足する．(11) を (106) に代入して簡単な計算の結果，次のようにこのテンソルの成分を電場と磁場ベクトルで表わした式がえられる．

$$S_{\iota\kappa}=-t_{\iota\kappa} \tag{109}$$

とおけば

$$t_{\iota\kappa}=E_\iota E_\kappa+H_\iota H_\kappa-\frac{1}{2}(E^2+H^2)\delta_{\iota\kappa} \tag{110}$$

は Maxwell の応力テンソルである．また

$$S_{\iota 4}=S_{4\iota}=\frac{i}{c}S_\iota \tag{111}$$

とおいたとき，S_ι を成分とするベクトル $\boldsymbol{S}$ は Poynting のベクトル

$$\boldsymbol{S}=c(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \tag{112}$$

である．最後に

$$S_{44}=-W \tag{113}$$

とおけば

$$W=\frac{1}{2}(E^2+H^2) \tag{114}$$

は，電磁場のエネルギー密度である．

(105) 式の $i=4$ の式は

$$f_4=\frac{i}{c}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})=-\frac{i}{c}\operatorname{div}\boldsymbol{S}+\frac{1}{ic}\frac{\partial W}{\partial t}$$

$$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})+\operatorname{div}\boldsymbol{S}+\frac{\partial W}{\partial t}=0 \tag{115}$$

と書ける．W を場のエネルギー密度，$\boldsymbol{S}$ をエネルギーの流れの密度と解釈すれば，この式はエネルギーの保存則を表わしている．(115) をある定まった面 σ で囲まれた有限の体積 V について積分すれば Gauss の定理により，

$$-\frac{d}{dt}\int_V W dV=\int_\sigma S_n d\sigma+\int_V(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})dV \tag{116}$$

がえられる．ここで S_n は $\boldsymbol{S}$ の $d\sigma$ の外向き法線方向の成分を表わす．このように，単位時間に減少する V 内の場のエネルギーは，表面 σ を通し外向きに流れ出る場のエネルギーの単位時間の流量と電磁力が V 内の物質にする仕事の和に等しい．

$i=1,\ 2,\ 3$ に対しては (105) は

$$f_\iota=\frac{\partial t_{\iota\kappa}}{\partial x_\kappa}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S_\iota}{c^2}\right) \tag{117}$$

となる．静電磁場の場合には最後の項は零となり (117) 式はちょうど $\epsilon=\mu=1$ なる物質中における力の密度に関する Maxwell の式になる．以上の推論は Minkowski† によるものである．Abraham‡ が指摘したように，閉じた系について，運動量が保存されるためには，ベクトル

$$\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2} \tag{118}$$

---

† H. Minkowski，第 IV 章 133 頁の文献を見よ．

‡ M. Abraham, *Ann. d. Phys.* **10**, 105 (1903); Abraham-Becker, *Theorie der Elektrizität*, vol. II, 6th ed., Leitzrg 1933.

が電磁場の運動量密度であると解釈しなければならない．なぜならば，全系を囲む閉曲面 σ の内部について (117) を積分すれば，$\int \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} dV$ は部分積分によって表面 σ 上の積分に変形されるが，そこでは，電磁場，したがって t_{ik} が零だから

$$\int \boldsymbol{f} dv = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{g} dv \tag{119}$$

がえられる．(119) の左辺は物質に作用する全力を表わし，これは単位時間当りの力学的運動量の増しだか $\frac{d\boldsymbol{G}_m}{dt}$ に等しい．したがって (119) は

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}_m + \int \boldsymbol{g} dv\right) = 0$$

と書ける．このように，一定値を保っているような全運動量をえんがためには，力学的運動量のほかに電磁的運動量 $\int \boldsymbol{g} dv$ の存在を仮定しなければならない．以上の推論からは C を一定値として電磁運動量密度が $\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}+C$ であることしか結論できない．しかし，電磁場が零になる時は $\boldsymbol{g}$ も零になるべきであるから，定数 C は零でなければならない．

さて

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{S}}{W} \tag{120}$$

を電磁エネルギーの伝播するる速度と定義すれば，電磁運動量密度は

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} = \frac{W}{c^2}\boldsymbol{w} \tag{121}$$

と書くことができる．これは力学的運動量密度について成り立つ (IV. 233) と全く類似な関係である．(120) で定義された速度 w が $w \leqslant c$ なる条件を満足してはじめて，この類似が密接であると云うことができる．偏った平面電磁波の場合には，$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})=0$ であり，$E=H$ であるから

$$w = \frac{|S|}{W} = \frac{cEH}{\frac{1}{2}(E^2+H^2)} = c,$$

すなわち，このような波のエネルギーは光速度で伝わる．

任意の運動をしている荷電粒子の場に対しては，(61) と (62) から

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) = 0 \quad \text{および} \quad E/H = \alpha \geqslant 1$$

すなわち

$$w=\frac{cEH}{\frac{1}{2}(E^2+H^2)}=\frac{2c\alpha}{1+\alpha^2}\leqslant c$$

となる.

61. 全エネルギー・運動量テンソル

運動方程式 (IV (229) 式) の f_i に電磁的な 4 元力の密度を表わす式 (105) を代入すれば，物質と電磁場の全系に関するエネルギーと運動量の保存則が次の形で与えられる.

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0, \tag{122}$$

ここで

$$T_{ik}=\theta_{ik}+S_{ik} \tag{123}$$

がこの系の全エネルギー・運動量である. §51 で与えた θ_{ik} の成分, §60 で与えた S_{ik} の成分を用いると全エネルギー・運動量テンソルの成分は

$$T_{\iota\kappa}=\frac{\mu_0 u_\iota u_\kappa}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}-t_{\iota\kappa}, \tag{124}$$

となる. ここに $t_{\iota\kappa}$ は Maxwell の応力テンソルである. 特に $T_{4\iota}$ を

$$T_{4\iota}=\frac{i}{c}S_\iota \tag{125}$$

とおいたとき S_ι を成分とするベクトル

$$\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\boldsymbol{u}+c(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$$

は全エネルギー流の密度を表わしている. さらに $T_{\iota 4}$ を

$$T_{\iota 4}=icg_\iota, \tag{126}$$

とおいたとき g_ι を成分とするベクトル

$$\boldsymbol{g}=\frac{\mu_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$$

は系の全運動量密度になる.

T_{44} 成分を

$$T_{44}=-h \tag{127}$$

とおいたときの

$$h=\frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}+\frac{1}{2}(E^2+H^2)$$

は全エネルギー密度である.

エネルギー・運動量テンソルの対角線成分の和 T_{ii} は (108) 式と第 IV 章の (198) 式より

$$T_{ii}=\theta_{ii}=-\mu_0 c^2 \sqrt{(1-u^2/c^2)}=-\mu^0 c^2 \qquad (128)$$

となる.

第 VI 章

一般の閉じた系．弾性的連続体の力学．場の理論

62. 閉じた系の定義

第 V 章では，各部分が互に他に影響を及ぼし合わないような荷電物質が電磁力の影響の下におかれた場合を取り扱った．その際，これらの力を記述する4-元ベクトル f_i が，電磁場を記述する場の量の函数である1つのテンソルの発散として表わされることを知った．相対性原理は，いかなる信号も c またはこれより小さな速度で伝わることを要求するので，空間中，有限な距離を距てて瞬間的に作用する力という考え方は不可能である．すなわち物体間の力はすべて，電磁力の場合と同様に，介在する物によって，伝達されるものと仮定することが必要である．したがって，いかなる型の力もすべて，(V. 105) に類似な仲だちをする場の量に依存するあるテンソル S_{ik} の発散として表わされるような4元的な力の密度で記述されるものと考えられる．こうして物質と場よりなる全系について §61 の同様，

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{1}$$

なる型のエネルギーと運動量の保存則がえられる．ただし T_{ik} は，この閉じた系のエネルギー・運動量テンソルである．成分 T_{i4} および T_{4i} の物理的意味は (V. 125, 126, 127) と同じで，

$$T_{4\iota}=\frac{i}{c}S_{\iota} \tag{2}$$

とおいたときのSはエネルギーの流れの密度であり，

$$T_{\iota 4}=icg_{\iota}, \qquad T_{44}=-h \tag{3}$$

とおいたときの g および h はそれぞれ全運動量密度および全エネルギー密度を表わす．これはいかなる閉じた系にも成り立つべきであるから，g や h に弾性的な応力やエネルギーが含まれている場合には，弾性体にも成り立つ．

$i=1. 2. 3$ に対して (1) は，

$$\frac{\partial T_{\iota\kappa}}{\partial x_{\kappa}}+\frac{\partial g_{\iota}}{\partial t}=0 \tag{4}$$

と書かれ，これは運動量の保存則を微分形式で表わしたものである．$T_{\iota\kappa}$ を応力テンソル，または運動量の流れのテンソルという（§51．134頁参照）．

同様にして (1) の $i=4$ の場合は，エネルギーの連続方程式

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S}+\frac{\partial h}{\partial t}=0 \tag{5}$$

を表わす．

閉じた系のエネルギー・運動量テンソルは対称，すなわち

$$T_{ik}=T_{ki} \tag{6}$$

でなければならない．この式の空間的成分，すなわち $T_{\iota\kappa}=T_{\kappa\iota}$ は，本質的に角運動量の保存則が成り立つことを表わしている（§§51 および 63 参照）．そして角運動量の保存則がいかなる慣性系についても成り立つためには，(6)式はその時間・空間成分についても成り立たなければならない．すなわち

$$T_{\iota 4}=T_{4\iota}. \tag{7}$$

あるいは，(2) と (3) によって

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{S}/c^2. \tag{8}$$

エネルギーの伝播速度 $\boldsymbol{u}^*$ を

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{S}/h \tag{9}$$

で定義すれば，電磁エネルギーの場合 (V. 120) と同様に，(7) また (8) は

$$\boldsymbol{g}=\frac{h}{c^2}\boldsymbol{u}^* \tag{10}$$

と書くことができる．この式は形式上力学的運動量に関する (IV. 233) 式に相当するもので，エネルギー密度 h に質量密度

$$\mu=h/c^2 \tag{11}$$

が対応することを示している．ところが (9) で定義された速度 $\boldsymbol{u}^*$ は c より大きくなりうるし，たとえ $u^*<c$ の場合にも Lorentz 変換に対する $\boldsymbol{u}^*$ の変換の性質は，一般には質点の速度の変換式 (II. 55) に従わないことは特に注意しなければならない．またエネルギー密度 h は負になることもある．したがって質量密度 h/c^2 もこれに対応して負になりうる．

各座標系毎に，4成分の量 S_i を導入し

$$S_i=(\boldsymbol{S},\ ich)=\frac{c}{i}T_{4i} \tag{12}$$

とすれば，(5) により，各座標系毎に

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_i}=0 \tag{13}$$

となる．しかし，S_i なる量は4元ベクトルの成分と同じように変換されない．

ここで $h>0$, $u^*<c$, すなわち,

$$S_iS_i=S^2-c^2h^2<0 \tag{14}$$

と仮定しよう．このときは，粒子の 4 元速度との類推で，各座標系毎に 4 つの量 U_i^* を

$$U_i^*=\left(\frac{\boldsymbol{u}^*}{\sqrt{(1-u^{*2}/c^2)}},\ \frac{ic}{\sqrt{(1-u^{*2}/c^2)}}\right) \tag{15}$$

で定義してみる．速度 $\boldsymbol{u}^*$ が質量の速度と同じ変換規則で変換される場合に限り，これらの量は time-like な 4 元ベクトルと同じ変換規則で変換される．

そうであるために，テンソル T_{ik} に課すべき条件を次に見出すことにしよう．

$$\sqrt{(1-u^{*2}/c^2)}=\sqrt{(1-S^2/h^2c^2)}=(-S_iS_i)^{1/2}/hc$$

であるから，

$$\left.\begin{aligned}U_i^*=\left(\frac{c\boldsymbol{S}}{(-S_lS_l)^{1/2}},\ \frac{ihc^2}{(-S_lS_l)^{1/2}}\right)=\frac{cS_i}{(-S_lS_l)^{1/2}}\\ U_i^*U_i^*=-c^2\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

となる．さて 2 つの慣性系 S と S' とを結ぶ無限小 Lorentz 変換

$$x_i'=x_i+\epsilon_{ik}x_k, \qquad \epsilon_{ik}=-\epsilon_{ki} \tag{17}$$

を考えよう．そうするとテンソルの変換則から

$$T'_{4i}=T_{4i}+\epsilon_{4l}T_{li}+\epsilon_{ik}T_{4k}$$

が成立する．したがって，(12) により，

$$\left.\begin{aligned}S_i'&=S_i+\epsilon_{ik}S_k+\frac{c}{i}\epsilon_{4k}T_{ki}\\ S_i'S_i'&=S_iS_i+\frac{2c}{i}\epsilon_{4k}T_{ki}S_i\end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

をえる．無限小の量 ϵ_{ik} について展開し，その 2 次以上の量を無視すれば

$$U_i^{*\prime}=\frac{cS_i'}{(-S_i'S_i')^{1/2}}=U_i^*+\epsilon_{ik}U_k^*+\frac{c^2\epsilon_{4k}}{i(-S_lS_l)^{1/2}}\left(T_{ki}+\frac{U_i^*T_{kl}U_l^*}{c^2}\right) \tag{18}$$

となる．したがって U_i^* が 4 元ベクトルのように変換されるためには，テンソル T_{ik} は $i=1, 2, 3$, および k のすべての値に対して条件

$$R_{ik}\equiv T_{ik}+\frac{T_{il}U_l^*U_k^*}{c^2}=0 \tag{19}$$

を満足しなければならない．$i=4$ では (19) は恒等的に満足されている．この条件はまた充分条件でもある．何となれば S 系で (19) が満足されている場合には，

$$U_i^{*\prime}=U_i^*+\epsilon_{ik}U_k^* \tag{20}$$

となるからである．またSから S' へ移る際，R_{ik} はテンソルと同じ変換を受ける．したがって，(19) はS' 系でも成り立つ．有限の Lorentz 変換は無限小 Lorentz 変換を無限回合成したものであるから，(19) 式はエネルギーの速度 $\boldsymbol{u}^*$ が質点の速度 $\boldsymbol{u}^*$ と同じ変換規則で変換されるために満足さるべき一般的条件である．

物理系のエネルギー・運動量テンソルは一般には，もちろん (19) を満足するわけではない．ところが，物理的な理由でこの条件が満足されなければならぬような場合が存在する．例えば，外力が作用しないしかも各部がお互に作用を及ぼしあわないような物質よりなる系というありふれた場合には，
$T_{ik}=\theta_{ik}=\mu^0 U_i U_k$ すなわち，

$$S_i=\frac{c}{i}\mu^0 U_i U_4,\qquad U_i^*=\frac{cS_i}{(-S_l S_l)^{1/2}}=U_i,$$

$$R_{ik}\equiv T_{ik}+\frac{T_{il}U_l^*U_k^*}{c^2}=\mu^0 U_i U_k+\frac{\mu^0 U_i U_l U_l U_k}{c^2}=0$$

となる．この場合には，エネルギーの伝播速度は物質の速度に等しいのは云うまでもないことである．ところが弾性体の場合には，§65 で述べるように一般には条件 (19) が満足されない．ずっと後になって (§76) 物理的な理由で条件 (19)が成り立たなければならないような他の重要な場合に遭遇するはずである．

63. 閉じた系の4元運動量および4元角運動量テンソル

$$g_i=\frac{1}{ic}T_{i4}=\left(\boldsymbol{g},\ \frac{i}{c}h\right) \tag{21}$$

とおけば，対称条件 (7) 式は

$$g_i=\frac{1}{c^2}S_i \tag{22}$$

で書きかえることができ，(13) 式より

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_i}=0 \tag{23}$$

がえられる．このさい g_i と S_i が4元ベクトルではないことは注意しなければならない．

さて物理空間においてある区域の外部では T_{ik} のすべての成分が零になるような有限な系について調べることにする．(1) 式に $dx_1dx_2dx_3$ を乗じて x_4 が一定の空間をもつ物理空間の全範囲にわたって積分すれば，(1) の初めから3項は空間座標 x_κ に関する T_{ik} の偏微分係数になっているが，この項の積分は零となる．

この結果

$$\frac{d}{dx_4}\int T_{i4}dV=0$$

が成立し，この関係式より

$$G_i=\int g_i dV=\left(\boldsymbol{G}, \frac{i}{c}H\right) \tag{24}$$

という 4 つの量が時間的に一定になることがわかる．ここに $\boldsymbol{G}$ は系の全運動量を，Hは系の全エネルギーを表わしている．また (1) から G_i という量が 4 元ベクトルの成分の変換法則に従うこと，すなわち G_i は 4 元運動量ベクトルであることが導かれる．この証明は次の通りである．

a_i を任意ではあるが一定の 4 元ベクトルとすると，次式で定義される 4 元ベクトル

$$b_k=a_i T_{ik} \tag{25}$$

は (1) より方程式

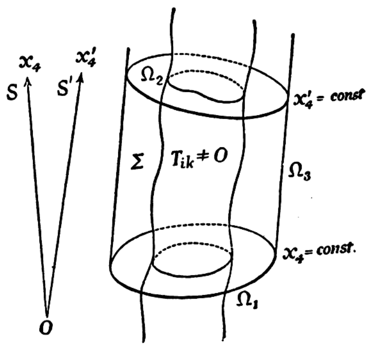
$$\frac{\partial b_k}{\partial x_k}=0 \tag{26}$$

を満足する．

(26) 式に $d\Sigma=\frac{1}{i}dx_1dx_2dx_3dx_4$ を乗じて (3+1) 空間内の有限な区域 Σ にわたって積分し，これに拡張された Gauss の定理 (IV. 191) を用いれば

$$0=\int\frac{\partial b_k}{\partial x_k}d\Sigma=\int_\Omega b_k dV_k \tag{27}$$

がえられる．ここに Ω は区域 Σ の 3 次元的な境界である．いまは有限な系について考察しているのであるから，(3+1) 空間において T_{ik} が零と異なる区域すなわち系の世界線は，space-like の方向の断面積が有限であるような管状をなしていることになる．



第 15 図

(3+1) 空間の任意の 2 つの座標系を S および S'，x_4＝一定 で定義される超平面を Ω_1，x_4'＝一定 で定義される超平面を Ω_2 とする．ただしこの定数の値は任意であるとする．第 15 図に示すように，区域 Σ として超平面 Ω_1，

Ω_2 および $T_{ik} \neq 0$ をみたす管を囲む円筒面 Ω_3 で境される領域をとれば，3次元的な超表面 Ω は Ω_1, Ω_2 および Ω_3 から形成される．Ω_3 上では T_{ik} および b_k は零であるので，積分 $\int_\Omega b_k dV_k$ において円筒面 Ω_3 よりの寄与は零である．このため

$$\int_{\Omega_1} b_k dV_k + \int_{\Omega_2} b_k dV_k = 0 \tag{28}$$

がえられる．(28) における積分は2つとも不変量であるので，どの座標系で計算してもさしつかえない．そこで第1項の積分は S 系で，第2項の積分は S' 系で行なう計算法を選んでみる．さて Ω_2 上の事象は Ω_1 上の事象より時間的に後であるとすれば Ω_1 上の外向き法線は時間軸の負の方向に向い，(IV. 191′) によって dV_k の成分は

$$dV_k = (0, 0, 0, +idx_1dx_2dx_3)$$

となる．この結果

$$\int_{\Omega_1} b_k dV_k = +i\int b_4(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_1dx_2dx_3 \tag{29}$$

となる．この積分において x_4 はまた一定に保たれている．

第2項の積分では，同様に考えれば

$$dV'_k = (0, 0, 0, -idx'_1dx'_2dx'_3)$$

となるので，

$$\int_{\Omega_2} b_k dV_k = \int_{{}_2} b'_k dV'_k = -i\int b'_4(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)dx'_1dx'_2dx'_3 \tag{30}$$

がえられる．

(28) 式に (29) と (30) を代入すれば，

$$\int b_4 dV = \int b'_4 dV'$$

となり，(25), (21) および (24) を上式と組み合わせれば，

$$a_i G_i = a'_i G'^{i} = \text{不変量} \tag{31}$$

がえられる．この関係式は任意の一定なベクトル a_i に関して成立しなければならぬから，G_i と G'_i との間の結合関係はベクトルに関する変換式

$$G'_i = \alpha_{ik} G_k \tag{31'}$$

で与えられることになる．上述の証明法においては T_{ik} が到る所で正則であるということが本質的に必要な条件である．もし T_{ik} がある世界線上で特異点をもっておれば，適当な面 Ω_4 を用いてこの世界線を区域 Σ より取り除かなければならなくなる．そして Ω_4 が当然 (27) の積分 $\int_\Omega b_k dV_k$ に寄与するこ

とになる．

G_i がベクトルであるから G_iG_i は不変量である．そこで粒子の場合に成立している (IV. 51) にならって

$$G_iG_i=-M_0^2c^2 \tag{32}$$

によってこの系の全固有質量 M_0 を定義する．

(1) と (6) を用いればさらに

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(x_iT_{kl}-x_kT_{il})=\delta_{il}T_{kl}-\delta_{kl}T_{il}=T_{ki}-T_{ik}=0 \tag{33}$$

という関係式が成立する．これを全物理空間にわたって積分すれば前に用いたと同じ論法で

$$\frac{d}{dx_4}\int(x_iT_{k4}-x_kT_{i4})dV=0$$

を導き出せる．この関係式は

$$M_{ik}=\int(x_ig_k-x_kg_i)dV=-M_{ki} \tag{34}$$

で与えられる 6 個の量が時間的に一定であることを示している．この結果を導く最も本質的なものはエネルギー・運動量テンソルが対称であることである．G_i がベクトルの性質をもつことを証明するのに用いたと同様な方法を用いると，(1) から M_{ik} という量が反対称テンソルの成分と同じ変換性をもつことが示される．すなわち M_{ik} は座標系の原点に関する角運動量という 4 元テンソルである．

角運動量テンソル $M_{\iota\kappa}$ の空間部分は (IV. 98) により軸性ベクトル

$$\boldsymbol{M}=\int(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{g})dV \tag{35}$$

に対隅である．ここで $\boldsymbol{M}$ は閉じた系の一定な全角運動量ベクトルに等しい．

§ 64. 重　　心†

(32) で定義された M_0 が実数の量になるよう，(§ 30 参照) G_i はどんな物理系についても time-like なベクトルであると見なすことができる．このような場合には，全運動量 $\boldsymbol{G}^0=0$ となるような慣性系，すなわち静止系 S^0 を見出すことが常に可能である．そして S^0 での G_i の成分は (32) により

† A. D. Fokker, *Relativitätstheorie*, Groningen, 1929, p. 170; A. Papapetrou, *Praktika Acad. d'Athénes*, **14**, 540 (1939); C. Møller, *Comm. Dublin Inst. for Advanced Studies*, Ser. A, No. 5 (1949); O. C. de Beauregard, *Relativité restreinte*, chapt. iv. Paris, 1949; M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc.* A, **195**, 62 (1948)

$$G_i^0=(0,0,0,iM_0c) \tag{36}$$

となる．そのときには，質点の場合と全く同様に S に対する静止系 S^0 の速度 $\boldsymbol{u}$ は，

$$\boldsymbol{u}=c^2\boldsymbol{G}/H \tag{37}$$

である．

Newton 力学では，質量の密度分布が $\mu=\mu(\boldsymbol{x},t)$ であるような物理系の重心は，座標ベクトルが

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{M}\int\mu(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{x}dV \tag{38}$$

で与えられるような点として定義された．ただし $M=\int\mu dV$ はこの系の全質量である．相対性力学では質量の密度は (11) によってエネルギー密度と結びついている．この場合には重心を (38) と (11) で定義することもできる．しかし，すぐわかるように，このようにして定義した点は，一般に，(38) の積分を行うのに用いた座標系の如何によってちがってくる．すなわち，各慣性系 S は各々それに固有の重心 $C(S)$ を有することになる．S 系では，その座標ベクトル $\boldsymbol{X}(C(S))=\boldsymbol{X}(S)$ は，(38), (11) および (24) により，

$$\boldsymbol{X}(s)=\frac{1}{H}\int h(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{x}dV \tag{39}$$

で定義される．

さて，(23) から，どの座標系でも

$$\frac{\partial(g_ix_k)}{\partial x_i}=g_i\delta_{ik}=g_k$$

であり，これを3次元空間全体について積分して

$$\frac{d}{dx_4}\int g_4x_kdV=G_k$$

がえられる．

H は時間と共に変化しないから，$k=1,2,3$ とした場合の上式から，(39) で定義された重心は S に対して一定の速度 $c^2\boldsymbol{G}/H$ すなわち静止系 S^0 と同じ速度 $\boldsymbol{u}$ で運動することがわかる．したがって，それぞれちがった重心 $C(S)$ はみな S^0 系では静止している．これらの重心のうちで，特別な役割を演ずるものが1つある．

それは静止系における重心である．これは固有重心とでも呼ぶべきものである．$X_i=(\boldsymbol{X},X_4)$ をこの固有重心の任意の座標系における時空座標とすれば，$X_i=X_i(\tau)$ は，この点の固有時 τ の1次函数となるであろう．さらに

$$U_i=\frac{dX_i}{d\tau}=\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{ic}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right)$$

がCの4元速度を表わすならば，(37) により

$$G_i=M_0U_i \tag{40}$$

となる．このように G_i と固有重心の速度との関係は，質点の場合と同じになる．

次に固有重心 C^0 に関する相対角運動量 4-元テンソル m_{ik} を，

$$\left.\begin{aligned} m_{ik}&=\int[(x_i-X_i)g_k-(x_k-X_k)g_i]dV \\ &=M_{ik}-(X_iG_k-X_kG_i) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

で表わせば，

変数 x_4 および τ について微分することにより，(40) を用いて

$$\frac{dm_{ik}}{dx_4}=0, \qquad \frac{dm_{ik}}{d\tau}=-U_iG_k+U_kG_i=0$$

をえる．このように

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{m}&=(m_{23},\ m_{31},\ m_{12}) \\ -i\boldsymbol{n}&=(m_{14},\ m_{24},\ m_{34}) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

で定義される2つの空間ベクトルは運動の恒量である．したがって (41) で $x_4=X_4$ に選んでもよい．そうすれば，(42) と (41) から

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{m}&=\int((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X})\times\boldsymbol{g})dV|_{x_4=X_4} \\ -\frac{\boldsymbol{n}}{c}&=\int\frac{h}{c^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X})dV|_{x_4=X_4}=\int\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X})dV|_{x_4=X_4} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

をえる．このように $\boldsymbol{m}$ は固有重心に対する相対角運動量，すなわち内部角運動量であるが，$-\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}$ は同じ点に関する質量のモーメントである．(43) の第2式を $\boldsymbol{X}$ についてとけば，

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{H}\int h\boldsymbol{x}dV\Big|_{x_4=X_4}+c\boldsymbol{n}/H=\boldsymbol{X}(S)+\frac{c\boldsymbol{n}}{H} \tag{44}$$

をえる．ここで $\boldsymbol{X}(S)$ および $\boldsymbol{X}(S^0)\equiv\boldsymbol{X}$ は S における重心 $C(S)$ および固有重心 $C(S^0)$ の同時座標ベクトルである．

(44) からわかるように，考えている系が内部角運動量をもっていないとき，$\boldsymbol{n}$，したがって m_{ik} がどの系でも零である場合に限り，どの重心もみな一致する．静止系 S^0 で (44) を書けば，定義により $\boldsymbol{X}^0=\boldsymbol{X}^0(S^0)$ であるから

$$\boldsymbol{n}^0=0, \quad \text{あるいは} \quad m^0_{i4}=0 \tag{45}$$

となる．この条件は，共変的な式

$$m_{ik}G_k=0 \tag{46}$$

と同等である．(46) 式を S^0 系で書いてみれば，(36) によりこのことは明らかである．したがってこの式は，固有重心がそれ自身の静止系での重心であることを共変的な形で表わしているものである．

S 内に S^0 と同じ空間軸の向きを選べば反対称テンソルの変換式 (IV. 81′) により，(45) によって，

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{m}^0}{\sqrt{(c^2-v^2)}} \tag{47}$$

をえる．ここで $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u}$ は S^0 に対する S 系の速度，$\boldsymbol{m}^0$ は静止系における内部角運動量ベクトルである．

S における重心と固有重心の同時的位置の差は時間に無関係な空間ベクトル

$$\boldsymbol{a}(S)=\boldsymbol{X}(S)-\boldsymbol{X}=-c\boldsymbol{n}/H=(\boldsymbol{m}^0\times\boldsymbol{v})/M_0c^2 \tag{48}$$

で与えられる．ここでわれわれは (40) からえられる関係式

$$H=\frac{M_0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{M_0c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$$

を用いた．

S から S^0 への変換は廻転を伴わない Lorentz 変換で与えられ，$\boldsymbol{a}$ は相対速度 $\boldsymbol{v}$ に直交するから，上に述べた 2 つの重心間の距離は静止系 S^0 でも (48) で与えられる．

静止系 S^0 中で，S または (8) 中の $\boldsymbol{v}$ を変動してえられる重心はすべて，固有重心 C^0 を中心とし半径が

$$\rho=\frac{|\boldsymbol{m}^0|}{M_0c} \tag{49}$$

である．角運動量ベクトル $\boldsymbol{m}_0$ に直交する 2 次元的な円板を形成する．非相対論の極限 $c\to\infty$ で，この円板の半径は零に収斂し，重心は唯 1 つ (Newton の重心) になってしまう．しかし，相対論の場合には重心は一般には 1 つではなくて，固有重心を中心とする上に述べた重心の円板がえられる．系が内部角運動量をもたない場合に限って，この円板の半径 (49) は零になる．巨視的な系では，半径 (49) は系そのものの大きさに比べれば非常に小さい．例えば地球の場合

$$\rho_{\text{地球}}=\frac{|\boldsymbol{m}^0|}{M_0c}\approx 10 \text{ メートル} \tag{50}$$

である．ところが原子大の系では重心の円板の大きさは系の大きさと同程度になる．

上の考察から，与えられた内部角運動量 m_0 と固有質量 M_0 を有する系の大きさについてある種の結論を導くことができる．静止系 S^0 で固有重心 C^0 を中心とし，半径 r なる球内に収まっている系を考えよう．すなわちこの球の外側ではエネルギー・運動量テンソルのすべての成分が零であるような系を考える．さらに，**エネルギー密度 h はどの慣性系でも到るところ正であると仮定すれば**，重心が形成する円板全体がこの球の内部に含まるべきことは明らかである．何となれば，例えば一点 $C(S)$ を，この円板上の任意の1点とすれば，この点は座標系 S では重心となり h は正であるから，それはこの物理系の内部になければならないからである．よって，

$$r \geq \frac{|m^0|}{M_0 c} \tag{51}$$

をえる．したがって，**エネルギー密度が正で，与えられた内部角運動量 m^0 と与えられた静止質量 M_0 を有する系は，**(51) **を満足するような有限なひろがりをもっていなければならない**．もし系がこれより小さければ，h はどの慣性系でも到るところ正ではありえない．

65. 弾性連続体内の力学の基礎方程式

第 IV 章の§50 と §51 で，与えられた外力の影響下にある各部分が互に他に作用をおよぼさない物質に関する力学を取り扱った．これからは外力の作用を受けない弾性体の力学を取り扱う．この場合，物体に及ぼす力は物質の変形のために隣接部分間に生ずる弾性力ただ1つである．そこでこの弾性体は§62で考察した一般的な閉じた力学系の特別な例になり，この力学系では (1) から (11) までの全エネルギー・運動量テンソルに関する関係式がすべて成立しなくてはならぬ．力学的なエネルギー・運動量テンソルはこのほかにとくに簡単な性質があり，これがこれから明らかにしようとすることである．

空間内の一定点において単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ で法線方向が指定される無限小の面素を $d\sigma$ とする．この面素の両側の物質は $d\sigma$ に比例する大きさの力を受けている．法線の指している側に作用する力を $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})d\sigma$ と書けば，反対側に及ぼす力は $\boldsymbol{t}(-\boldsymbol{n})d\sigma$ で表わされ，作用と反作用とは大きさ等しく向きが反対であるから $\boldsymbol{t}(-\boldsymbol{n})d\sigma=-\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})d\sigma$ でなければならぬ．次に第 16 図に示すように，p を頂点とし，p を通る各稜が直交座標軸に平行である，4 面体 $abcp$ のに含まれる物質の無限小部分について考察する．各軸の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_1^{(1)}$, $\boldsymbol{n}_2^{(2)}$, $\boldsymbol{n}_3^{(3)}$，三角形 abc の面積を $d\sigma$，その外向きの法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ の成分を n_1, n_2, n_3 とすれば，三角形 pbc, pca および pab の

面積はそれぞれ $n_1d\sigma$, $n_2d\sigma$, $n_3d\sigma$ である．したがってこの部分に作用する全弾性力は

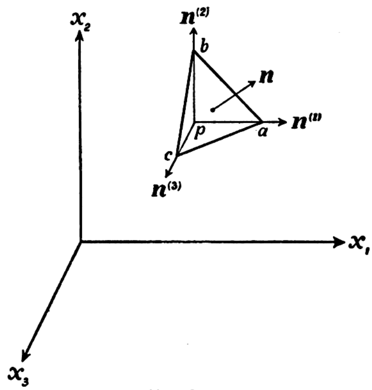
$$-\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})d\sigma+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}^{(1)})n_1d\sigma+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}^{(2)})n_2d\sigma+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}^{(3)})n_3d\sigma$$

となる．この力は，正四面体部の単位時間あたりの運動量の変化 $d(\boldsymbol{g}\delta V)/dt$ に等しくなければならない．ここに $\boldsymbol{g}$ は運動量密度であり，δV は4面体の体積を表わす．4面体の体積を無限小に縮めた極限では δV は $d\sigma$ よりも高次の速さで零に近づくから

$$\frac{d}{d\sigma}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{g}\cdot\delta V)\to 0.$$

したがって

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}^{(1)})n_1+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}^{(2)})n_2+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}^{(3)})n_3 \tag{52}$$



第 16 図

が成立する．ベクトル $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}^{(k)})$ の成分を $t_{\iota\kappa}$ で表わせば (52) 式は

$$t_\iota(\boldsymbol{n})=t_{\iota\kappa}n_\kappa \tag{53}$$

の形に書ける．

$t_\iota(\boldsymbol{n})$ と n_κ は共に空間ベクトルの成分であるから (53) より直交座標軸の回転に際して $t_{\iota\kappa}$ は空間テンソルの成分と同じ変換をすることがわかる．$t_{\iota\kappa}$ は弾性の応力テンソルであるが，全エネルギー・運動量テンソル T_{ik} の空間部分 $T_{\iota\kappa}$ が絶対応力テンソル†と呼ばれるのに対応してしばしば相対応力テンソルと呼ばれる．

ある閉曲面 σ の内部の物質に作用する全弾性力 $\boldsymbol{F}$ は，σ の面素 $d\sigma$ の外向きの法線を $\boldsymbol{n}$ で表わせば，$-\int_\sigma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})d\sigma$ に等しい．

(53) と Gauss の定理 (IV. 192) を用いればこの力 $\boldsymbol{F}$ の成分 F_ι は次式のように書かれる．

$$F_\iota=-\int_\sigma t_{\iota\kappa}n_\kappa d\sigma=-\int_\Omega \frac{\partial t_{\iota\kappa}}{\partial x_\kappa}dV. \tag{54}$$

上式の右辺の積分領域 Ω は閉曲面 σ の内部全域にわたっている．そこで弾性力の密度 $\boldsymbol{f}$ を

† M. von Laue. *Die Relativitätstheorie* (3rd ed., Braunschweig 1919), Vol. i, § 29 *Ann. d. Phys.* **35**, 524 (1911)

$$F_\iota=\int_\Omega f_\iota dV \tag{55}$$

によって定義し，この定義 (55) と (54) とを比較すれば，弾性力の密度と相対応力テンソルとの間には次の関係式

$$f_\iota=-\frac{\partial t_{\iota\kappa}}{\partial x_\kappa} \tag{56}$$

が成立することがわかる．

以上の結果から体積 δV の微小物質片の運動を定める運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(g_\iota\delta V)=f_\iota\delta V=-\frac{\partial t_{\iota\kappa}}{\partial x_\kappa}\delta V \tag{57}$$

となる．ただし $\boldsymbol{g}$ は運動量密度，d/dt は実質的時間微分演算を表わしている．(IV. 201) と (IV. 204) を用いて (57) の左辺を変形すれば

$$\frac{d}{dt}(g_\iota\delta V)=\frac{dg_\iota}{dt}\delta V+g_\iota\frac{d}{dt}\delta V=\left(\frac{\partial g_\iota}{\partial t}+\frac{\partial g_\iota}{\partial x_\kappa}u_\kappa\right)\delta V+g_\iota\delta V\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_\kappa}$$
$$=\left(\frac{\partial g_\iota}{\partial t}+\frac{\partial(g_\iota u_\kappa)}{\partial x_\kappa}\right)\delta V \tag{58}$$

となる．上式の u_κ はわれわれが着目している場所を刻々に占める物質の速度 $\boldsymbol{u}$ の成分である．(58) を (57) に代入すれば

$$\frac{\partial g_\iota}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\kappa}(g_\iota u_\kappa+t_{\iota\kappa})=0 \tag{59}$$

がえられる．一方運動量保存則は (4) の形で表わされているから (4) と (59) から絶対応力テンソルと相対応力テンソルを結ぶ関係式

$$T_{\iota\kappa}=t_{\iota\kappa}+g_\iota u_\kappa \tag{60}$$

がえられる．

次は運動量密度 $\boldsymbol{g}$ を表わす式を求める段階であるが，このためには先ずエネルギー流 $\boldsymbol{S}$ を求めれば，$\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{S}$ の間の基本的な関係式 (8) すなわち下式

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{S}/c^2 \tag{61}$$

から $\boldsymbol{g}$ がえられる．以下これを行なう．

閉曲面 σ 内の物質に単位時間あたりに弾性力のなす仕事は

$$A=-\int_\sigma(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{u})d\sigma=-\int_\sigma t_{\iota\kappa}n_\kappa u_\iota d\sigma=-\int_\Omega\frac{\partial(u_\iota t_{\iota\kappa})}{\partial x_\kappa}dV$$

である．最後の積分の積分領域 Ω は面 σ の包む内部全域である．したがって体積 δV の微小片がなされた仕事 δA は

$$\delta A=-\frac{\partial(u_\iota t_{\iota\kappa})}{\partial x_\kappa}\delta V. \tag{62}$$

これは δV 内の単位時間内のエネルギーの増加に等しくなくてはならない．h

を弾性エネルギーをも含めた全エネルギー密度とすれば，このエネルギー増加は $\dfrac{d}{dt}(h\delta V)$ である．

$$\frac{d}{dt}(h\delta V)=\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x_\kappa}u_\kappa\right)\delta V+h\delta V\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_\kappa}$$
$$=\left[\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\right](hu_\kappa)\delta V \tag{63}$$

であるから，この (63) 式と (62) 式が等しいことより

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\kappa}(hu_\kappa+u_\iota t_{\iota\kappa})=0 \tag{64}$$

が成立する．(5) と (64) とを比較すれば，全エネルギー流 $\boldsymbol{S}$ が次式で表わされることがわかる．

$$\boldsymbol{S}=h\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}). \tag{65}$$

上式で $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t})$ はその成分が $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t})_\kappa=u_\iota t_{\iota\kappa}$ である空間ベクトルである．このようにエネルギー流には携帯流 (convection current) $h\boldsymbol{u}$ のほかにさらに弾性力のする仕事によって生ずるエネルギーの移動が加わっている．そこで (61) と (11) とから全運動量密度として

$$\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}=\mu\boldsymbol{u}+\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t})}{c^2} \tag{66}$$

がえられる．ここで $\mu=h/c^2$ は弾性エネルギーによる質量も含めた全質量密度を表わす．(66) の第2項があるために運動量密度ベクトルの方向は一般には物質の運動方向とは一致しない．そこで

$$g_\iota u_\iota \neq g_\kappa u_\iota.$$

角運動量保存則から $T_{\iota\kappa}=T_{\kappa\iota}$ が成立するから (§63 を見よ)，(60) 式より

$$t_{\iota\kappa}-t_{\kappa\iota}=-gu_\kappa+g_\kappa u_\iota=(-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t})_\iota u_\kappa+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t})_\kappa u_\iota)/c^2\neq 0$$

となって相対応力テンソルは対称ではない．

われわれが着目している点の物質に対する各瞬間の静止系 S^0 においては，速度 $\boldsymbol{u}^0=0$ であるから，この系においてのみ次の関係式

$$t^0{}_{\iota\kappa}=T^0{}_{\iota\kappa}=T^0{}_{\kappa\iota}=t^0{}_{\kappa\iota},\qquad S^0{}_\iota=g^0{}_\iota=T^0{}_{\iota4}=0,\qquad T^0{}_{44}=-h^0 \tag{67}$$

が成立する．ただし h^0 は静止エネルギー密度である．

力学的エネルギー・運動量テンソル T_{ik} は U_i を物質の4元速度とすれば，

$$T_{ik}U_k=-h^0U_i \tag{68}$$

という共変的な関係式を満足する．(68) を静止系で書けば $U_i^0=(0,0,0,ic)$ であるから (68) より (67) が成立することが直ちにわかる．(68) という関係式が成立するのは純力学的エネルギー・運動量テンソルの特性であって (IV. 246)

はその特別な場合として (68) は包含される．(68) に U_i を乗ずれば，静止エネルギー密度（これは不変量である）h^0 が

$$h^0=U_i T_{ik} U_k/c^2 \tag{69}$$

のように表わされる．また $i=\iota=1, 2, 3$ については (68) 式から

$$T_{\iota\kappa}U_\kappa+T_{\iota 4}U_4=-h^0 U_\iota$$

がえられ，それと (60), (3) および (IV. 39) から

$$(t_{\iota\kappa}+g_\iota u_\kappa)u_\kappa-c^2 g_\iota=-h^0 u_\iota.$$

上式を g_ι について解けば運動量密度 $\boldsymbol{g}$ が

$$\boldsymbol{g}=\frac{\mu^0\boldsymbol{u}+(1/c^2)(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u})}{1-u^2/c^2} \tag{70}$$

とも表わされることになる．ここに $\mu^0=h^0/c^2$ は静止エネルギー密度，$(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u})$ は成分が $t_{\iota\kappa}u_\kappa$ の空間ベクトルである．(IV. 39) を用いれば (70) は次のように書ける．

$$T_{\iota 4}=T_{4\iota}=icg_\iota=\mu^0 U_\iota U_4+\frac{t_{\iota\lambda}U_\lambda U_4}{c^2}. \tag{71}$$

方程式 (68) で $i=4$ とおいて (70) を用いると次の関係式がえられる．

$$h=h^0+(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u})=\frac{h^0+(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{u})/c^2}{1-u^2/c^2}, \tag{72}$$

ただし $(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{u})$ は $u_\iota t_{\iota\kappa}u_\kappa$ を表わしている．(72) を書きかえれば

$$T_{44}=-h=+\mu^0 U_4 U_4-\frac{1}{c^2}U_\iota t_{\iota\kappa}U_\kappa \tag{73}$$

と書ける．また (69) 式から

$$h^0=h\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{u}) \tag{74}$$

がえられるが，これは (72) と同じである．(74) の右辺は，h^0 に等しいのであるから不変量となる．

(74) を c^2 で除した関係式

$$\mu^0=\mu\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)-\frac{1}{c^4}(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{u}) \tag{75}$$

は，各部が互に作用をおよぼさない物質の場合に成立した関係式 (IV. 199) の拡張である．$\boldsymbol{g}$ に関する 2 つの表示式 (66) と (70) をくらべ，この結果に (75) を用いれば，相対応力テンソル $t_{\iota\kappa}$ に関して次の恒等式が成立する．

$$(1-u^2/c^2)(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t})=(\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{u})/c^2. \tag{76}$$

閉じた系のエネルギー・運動量テンソルの分け方に応じて閉じた系をそれぞれ閉じていない部分系に分ける方法は無限にたくさんある．いま次のように分

けてみる．

$$T_{ik}=\theta_{ik}+S_{ik}. \tag{77}$$

ただし

$$\theta_{ik}=\mu^0 U_i U_k \tag{78}$$

は運動エネルギー・運動量テンソルである．(60), (71) および (IV. 39) を用いて

$$T_{\iota\kappa}=t_{\iota\kappa}+g_\iota u_\kappa=\mu^0 U_\iota U_\kappa+t_{\iota\kappa}+\frac{t_{\iota\lambda}U_\lambda U_\kappa}{c^2} \tag{79}$$

がえられる．この (79) と (71), (73) からテンソル S_{ik} の成分は，それぞれ次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} S_{\iota\kappa}&=S_{\kappa\iota}=T_{\iota\kappa}-\mu^0 U_\iota U_\kappa=t_{\iota\kappa}+\frac{t_{\iota\lambda}U_\lambda U_\kappa}{c^2}\\ S_{\iota 4}&=S_{4\iota}=T_{\iota 4}-\mu^0 U_\iota U_4=\frac{t_{\iota\lambda}U_\lambda U_4}{c^2}\\ S_{44}&=T_{44}-\mu^0 U_4 U_4=-\frac{1}{c^2}U_\iota t_{\iota\kappa}U_\kappa \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

(68) によって S_{ik} は

$$S_{ik}U_k=(T_{ik}-\mu^0 U_i U_k)U_k=-h^0 U_i+\mu^0 c^2 U_i=0 \tag{81}$$

という条件を満たすことがわかるが，この条件は (80) 式からも直ちに導かれる．

(80) から静止系においては

$$S^0_{\iota\kappa}=t^0_{\kappa\iota},\quad S^0_{i4}=S^0_{4i}=0 \tag{82}$$

が成立することがわかる．

$$f_i^{\text{elast}}=-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{83}$$

とおけば，方程式 (1) を (IV. 229) と相似の形

$$\frac{\partial\theta_{ik}}{\partial x_k}=f_i^{\text{elast}} \tag{84}$$

に書くことができる．(83) で定義した力の密度 $\boldsymbol{f}^{\text{elast}}$ は (56) で定義した弾性力 $\boldsymbol{f}$ とは一般には一致しないことは強く注意しておく．簡単な計算によって $(f_i^{\text{elast}}U_i)\neq 0$ がわかるが，これはすでに §50 で示したように，系の固有質量が決して保存しないということを意味している．これは μ^0 が弾性力の作用によって変化する弾性エネルギーに対応する質量を含んでいることから当然のことではある．またテンソル θ_{ik} は (19) の条件を満たすのに対して，全力学的エネルギー・運動量テンソル T_{ik} は一般にはこの条件を満足しない．

相対応力テンソル $t_{\iota\kappa}$ は物質の内部的変形のために生じたものである．静止系 S^0 における相対応力テンソルと変形との関係は通常の弾性体理論でえられ

る方程式で与えられる．したがって変形が小さければ，この関係は Hooke の法則に従う．応力テンソルの変換の性質から，この関係式は任意の慣性系において成り立つことになる†.

弾性体が 4 元力の密度 f_i^{ext} で表わされる非力学的な外力の作用を受けているときは，(1) の代りに

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=f_i^{\text{ext}} \tag{85}$$

を用いなければならない．(77) と (83) を用いて (85) を変形すれば，

$$\frac{\partial \theta_{ik}}{\partial x_k}=f_i^{\text{elast}}+f_i^{\text{ext}}=f_i \tag{86}$$

となる．

66. 弾性体の応力．運動量およびエネルギー密度の変換

座標系 S と S^0 で，空間軸の向きが同じであるとする．S に対する S^0 の速度は考えている点における速度 $\boldsymbol{u}$ と同じであるから，変換の係数 α_{ik} は (IV. 125)，すなわち

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{\iota\kappa}=\delta_{\iota\kappa}+\frac{u_\iota u_\kappa}{u^2}(\gamma-1)\\&\alpha_{4\iota}=-\alpha_{\iota 4}=-\frac{i}{c}\gamma u_\iota,\qquad \alpha_{44}=\gamma\\&\gamma=(1-u^2/c^2)^{-1/2}\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

で与えられる．

(67) とテンソルの変換式から

$$T_{ik}=T^0_{lm}\alpha_{li}\alpha_{mk}=t^0_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda i}\alpha_{\mu k}-h^0\alpha_{4i}\alpha_{4k} \tag{88}$$

をえる．$i=k=4$ のとき，これは

$$\left.\begin{aligned}&h=-t^0_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda 4}\alpha_{\mu 4}+h^0\alpha_{44}^2=\gamma^2\frac{u_\lambda t^0_{\lambda\mu}u_\mu}{c^2}+\gamma^2 h^0\\&h=\frac{h^0+(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}^0.\,\boldsymbol{u})/c^2}{1-u^2/c^2}=U_iT^0{}_{ik}U_k/c^2\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

となる．

(89) と (72) を比べると解るように

$$(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}^0.\,\boldsymbol{u}) \tag{90}$$

でなければならない．$i=\iota=1,2,3,\ k=4$ の場合 (87) を用いて，(88) から

† G. Herglotz, *Ann. d. Phys.* **36**, 493 (1911)

$$g_\iota = \frac{T_{\iota 4}}{ic} = \frac{t^0_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\iota}\alpha_{\mu 4} - h^0\alpha_{4\iota}\alpha_{44}}{ic}$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(\delta_{\iota\lambda} + \frac{u_\iota u_\lambda}{u^2}(\gamma-1)\right)\gamma u_\mu t^0_{\lambda\mu} + \frac{1}{c^2}\gamma^2 u_\iota h^0$$

$$= u_\iota \frac{\gamma^2}{c^2}\left[h^0 + \frac{(u_\lambda t^0_{\lambda\mu} u_\mu)}{u^2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right] + \frac{\gamma}{c^2} t^0_{\iota\mu} u_\mu \tag{91}$$

をえる．ベクトル記号とテンソル記号を用いると

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{u}\frac{\gamma^2}{c^2}\left[h^0 + \frac{(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}^0.\,\boldsymbol{u})}{u^2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right] + \frac{\gamma}{c^2}(\boldsymbol{t}^0.\,\boldsymbol{u}) \tag{92}$$

となる．

同様にして，$i=\iota$, $k=\kappa$ のとき，(88) および (60) と (91) から

$$t_{\iota\kappa} = t^0_{\iota\kappa} + u_\iota u_\lambda t^0_{\lambda\kappa}\frac{\gamma-1}{u^2} - t^0_{\iota\lambda}u_\lambda u_\kappa \frac{\gamma-1}{\gamma u^2} - u_\iota u_\kappa \frac{(u_\lambda t^0_{\lambda\mu} u_\mu)}{u^4}\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} \tag{93}$$

をえる．

空間ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の直積，すなわち成分が a_ι, b_κ なるテンソルに3次元テンソルの記号 $\boldsymbol{a}\circledcirc\boldsymbol{b}$ を導入すれば，(93) は3次元テンソルの記号で

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^0 + \boldsymbol{u}\circledcirc(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}^0)\frac{(\gamma-1)}{u^2} - (\boldsymbol{t}^0.\,\boldsymbol{u})\circledcirc\boldsymbol{u}\frac{\gamma-1}{\gamma u^2} - \boldsymbol{u}\circledcirc\boldsymbol{u}\frac{(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}^0.\,\boldsymbol{u})}{u^4}\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} \tag{94}$$

と書くことができる．

この変換式により，(90) が成り立つことが容易にたしかめられる，また $t^0_{\iota\kappa}$ が対称なこと，すなわち $(\boldsymbol{t}^0.\,\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{t}^0)$ であることに注意すれば $\boldsymbol{t}$ を与える式 (94) が (76) 式と矛盾しないことを簡単な計算で示すことができる．

考えている点で物質の運動が x-軸に平行な場合，$\boldsymbol{u}=(u,0,0)$ という特別な場合には，変換式 (89), (92) および (93) は

$$\left.\begin{aligned}
&h = \left(h^0 + \frac{u^2}{c^2}t^0_{xx}\right)\gamma^2 \\
&g_x = \gamma^2\left(\mu^0 + \frac{t^0_{xx}}{c^2}\right)u, \quad g_y = \frac{\gamma t^0_{yx}}{c^2}u, \quad g_z = \frac{\gamma t^0_{zx}}{c^2}u \\
&t_{xx} = t^0_{xx}, \qquad t_{xy} = \gamma t^0_{xy}, \qquad t_{xz} = \gamma t^0_{xz} \\
&t_{yx} = \frac{1}{\gamma}t^0_{yx}, \qquad t_{yy} = t^0_{yy}, \qquad t_{yz} = t^0_{yz} \\
&t_{zx} = \frac{t^0_{zx}}{\gamma}, \qquad t_{zy} = t^0_{zy}, \qquad t_{zz} = t^0_{zz}
\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

となる．

67. 完　全　流　体

完全流体では法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ の面素に作用する単位面積あたりの力 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ は $\boldsymbol{n}$ に平行である．すなわち p を圧力（の強さ）とすれば

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})=p\boldsymbol{n} \tag{96}$$

よって (53) を用いて

$$t_{\iota\kappa}=p\delta_{\iota\kappa}. \tag{97}$$

特に静止系においては，

$$t^0_{\iota\kappa}=p^0\delta_{\iota\kappa}. \tag{98}$$

この場合に変換公式 (93) 適を用すれば，

$$p\delta_{\iota\kappa}=p^0\delta_{\iota\kappa}, \tag{99}$$

すなわち

$$p=p^0 \tag{100}$$

がえられ，圧力は不変量となる．

(80) と (97) より完全流体においては

$$\left.\begin{aligned}
S_{\iota\kappa}&=S_{\kappa\iota}=p\delta_{\iota\kappa}+\frac{p}{c^2}U_\iota U_\kappa\\
S_{\iota4}&=S_{4\iota}=\frac{p}{c^2}U_\iota U_4\\
S_{44}&=-\frac{p}{c^2}(U_\iota U_\iota)=\frac{p}{c^2}U_4U_4+p
\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

すなわち

$$S_{ik}=\frac{p}{c^2}U_iU_k+p\delta_{ik} \tag{102}$$

が成立することが導かれる．ここに $p=p^0$ は圧力でこれは不変量である．S_{ik} が (102) の形で表わされることは，静止系では (102) が (82) と一致するということからもいわれることである．

(102) より圧力 p はテンソル S_{ik} の対角線要素の和（これは不変量）の 1/3 になる．

$$p=\frac{1}{3}S_{ii}. \tag{103}$$

(77) と (78) より完全流体の全エネルギー・運動量テンソル T_{ik} は

$$T_{ik}=\left(\mu^0+\frac{p}{c^2}\right)U_iU_k+p\delta_{ik} \tag{104}$$

となる．圧力 $p=p^0$ は静止密度 μ^0 および温度の函数で，流体の状態方程式

---

† M. Planck, *Berl. Ber.*, p. 542 (1907); *Ann. d. Phys.* **76**, 1 (1908).

によって与えられる.

流体が4元力の密度 f_i^{ext} で表わされる外力を受けているときは，流体の運動方程式は (86) の形で与えられる. ただし f_i^{elast} には次式を用いる.

$$f_i^{\mathrm{elast}}=-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}=-\frac{pU_i}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}-\frac{pU_k}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{U_iU_k}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}$$
$$=-\frac{pU_i}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}-\frac{p}{c^2}\frac{dU_i}{d\tau}-\frac{U_i}{c^2}\frac{dp}{d\tau}-\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{105}$$

いま f_i^{ext} は (IV. 214) で与えられる型の力とすると，この型の力は恒等式 (IV. 216) を満たすから，f_i^{ext} については $U_if_i^{\mathrm{ext}}\equiv 0$ が成立する. このため f_i^{ext} が作用しても固有質量の生成は少しも起らない. これに反して，(105) を用いれば

$$(U_if_i^{\mathrm{elast}})=p\frac{\partial U_k}{\partial x_k}+\frac{dp}{d\tau}-U_i\frac{\partial p}{\partial x_i}=p\frac{\partial U_k}{\partial x_k}=p^0\,\mathrm{div}^0\,\boldsymbol{u} \tag{106}$$

が成立するから，f_i^{elast} の作用は固有質量の生成を生起する. $\mathrm{div}^0\boldsymbol{u}^0$ は静止系における体積膨張であるから，$-p^0\mathrm{div}^0\boldsymbol{u}^0$ は静止系での単位時間あたりの弾性ポテンシャル・エネルギーの増加を表わすことになる. μ_0には弾性ポテンシャル・エネルギーのための質量も含まれている. これを用いると静止系における固有質量密度の生成率を表わす量が $-\frac{p}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}$ になることが次の計算からわかる. すなわち (86) に U_i を乗じて i について和をとれば，(IV. 226) に相似の関係式

$$\frac{\partial \mu^0 U_k}{\partial x_k}=-\frac{U_if_i^{\mathrm{elast}}}{c^2}=-p\frac{(\partial U_k/\partial x_k)}{c^2} \tag{107}$$

がえられ，この式は

$$-\frac{p}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \tag{108}$$

が固有質量の生成源の密度であることを示している. 流体が非圧縮性として取り扱える場合には $\partial U_k/\partial x_k=\mathrm{div}^0\boldsymbol{u}=0$ がえられ，したがって固有質量も保存されることになる.

(107) を用いれば

$$\frac{\partial_i\theta_k}{\partial x_k}=\mu^0U_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+U_i\frac{\partial(\mu^0U_k)}{\partial x_k}=\mu^0\frac{dU_i}{d\tau}-\frac{pU_i}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \tag{109}$$

がえられる. 上の (109) と (105) を (86) に代入すれば，次に示すような形の完全流体の運動方程式が求められる.

$$\left(\mu^0+\frac{p}{c^2}\right)\frac{dU_i}{d\tau}=f_i^{\text{ext}}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{U_i}{c^2}\frac{dp}{d\tau}. \tag{110}$$

エネルギー密度と運動量密度は (66), (70), (89) および (97) から

$$g=\left(\mu+\frac{p}{c^2}\right)u=\frac{(\mu^0+p^0/c^2)u}{1-u^2/c^2},\qquad h=\frac{h^0+p^0u^2/c^2}{1-u^2/c^2},\ p=p^0 \tag{111}$$

となるが, これは (104) から直接えられる.

μ^0, p^0 および $\boldsymbol{u}$ が弾性体のあらゆる部分で同じ値をとる定数であれば, (111) を全体積 $V=V_0\sqrt{(1-u^2/c^2)}$ について積分して, 全運動量, 全エネルギーが次のような形で求められる.

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{G}=\boldsymbol{g}V&=\frac{\dfrac{h^0+p^0}{c^2}V\boldsymbol{u}}{1-\dfrac{u^2}{c^2}}=\frac{\dfrac{(h^0+p^0)V^0}{c^2}\boldsymbol{u}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)}}=\frac{\dfrac{H^0+p^0V^0}{c^2}\boldsymbol{u}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)}}\\
H=hV&=\frac{H^0+\dfrac{p^0V^0}{c^2}u^2}{\sqrt{\left(1-\dfrac{c^2}{u^2}\right)}}
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

(112) をながめると, 全運動量, 全エネルギーを成分とする量 $(\boldsymbol{G}, (i/c)H)$ は, 4元ベクトルになっていない. これは §63 の一般論でえられた結果に反するように見えるが, §63 では閉じた系についての結果であって, 今の場合の物体は, 次に説明するように閉じた系ではないので, 別に矛盾しているのではない. すなわちこの場合のように μ^0, p^0, $\boldsymbol{u}$ が物体のすべての部分で一定で等しくなるためには流体を器に閉じこめなければならなく, この器壁が流体に及ぼす力はエネルギー・運動量テンソル (104) に含まれてはいない (第 VII 章を見よ). (112) を書き変えれば

$$\boldsymbol{G}=\frac{H+pV}{c^2}\boldsymbol{u},\qquad H+pV=\frac{H^0+p^0V^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \tag{113}$$

となり, これを見ればこの系はエネルギー $E=H+pV$, 静止エネルギー $E^0=H^0+p^0V^0$ の粒子と同じ運動量をもっていることがわかる. このように

$$p_i=\left(\boldsymbol{G},\ \frac{i}{c}(H+pV)\right) \tag{114}$$

は4元ベクトルの成分と同じ変換をする.

68. スカラー中間子場. 一般の場の理論

原子核とその外側にある電子の間に働く力は電磁場によってうまく記述でき

るが，核を構成する粒子の間の力の作用する距離が短かいという特性は，核力が本来電磁的なものでないことを物語っている．核力を説明するため，湯川は†，いわゆる中間子場というものを導入した．中間子場のうちで最も簡単な型のものはスカラー場で次のような場の方程式を満足する不変なスカラー場の函数，$\Psi(x_i)$ で記述される．

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_i}-\kappa^2\Psi=0 \quad \text{すなわち} \quad \Box\Psi-\kappa^2\Psi=0, \tag{115}$$

ここで κ は核力の到達距離と関係のある定数である．そして‘中性中間子場’の場合には Ψ は，時空座標 (x_i) に関する実数の函数である．

$\Psi_i\equiv\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_i}$ なる記号を導入すれば，場の方程式は，

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_i}-\kappa^2\Psi=0 \tag{116}$$

と書くこともできる．これらの方程式は，1つの変分原理

$$\delta\int\mathfrak{L}(\Psi,\Psi_i)d\Sigma=0, \tag{117}$$

ただし，

$$\mathfrak{L}=-\frac{1}{2}(\Psi_i\Psi_i+\kappa^2\Psi^2) \tag{118}$$

から導くことができる．事実，もし Ψ の変分 $\delta\Psi=\delta\Psi(x_i)$ が任意な4次元的積分領域の境界で零になるものと仮定すれば，$\delta\Psi=(\partial_i/\partial x_i)\delta\Psi(x_i)$ であるから

$$\left.\begin{aligned}\delta\int\mathfrak{L}d\Sigma=\int\delta\mathfrak{L}d\Sigma&=\int\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Psi}\delta\Psi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Psi_i}\delta\Psi_i\right)d\Sigma\\&=\int\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Psi}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Psi_i}\right)\right]\delta\Psi d\Sigma\end{aligned}\right\} \tag{119}$$

となる．さて，いま考えている型の Ψ の任意の変分に対してこの式が零でなければならぬのであるから，

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Psi}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Psi_i}\right)=0 \tag{120}$$

がえられる．これは変分原理 (117) に対する Euler の方程式である．$\mathfrak{L}$ の式を (118) とすれば (120) は (116) 式と全く同じものである．スカラー中間子場のエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{ik}=\Psi_i\Psi_k+\mathfrak{L}\delta_{ik}=\Psi_i\Psi_k-\frac{1}{2}(\Psi_l\Psi_l+\kappa^2\Psi^2)\delta_{ik} \tag{121}$$

で与えられる．場の方程式 (116) を用いればこのテンソルが閉じた系について

---

† H. Yukawa, *Proc. Math. Phys. Soc. Japan*, **17**, 48 (1935)

成り立つべき式

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{122}$$

を満たすことを容易に知ることができる．

このスカラー場は，多数の場の変数，

$$Q^\zeta=Q^\zeta(x_i)=(Q^1(x_i),\ Q^2(x_i),\ \cdots\cdots) \tag{123}$$

で記述されるような一般の場の特別な場合である．

この場の方程式が変分原理

$$\delta\int \mathfrak{L}\,d\Sigma=0 \tag{124}$$

から導かれるものとしよう．この場合

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(Q^\zeta,\ Q_i^\zeta) \tag{125}$$

は場の変数およびその第 1 階微分

$$Q_i^\zeta\equiv\frac{\partial Q^\zeta}{\partial x_i} \tag{126}$$

のある不変な代数函数である．このことは場の方程式が，変分原理 (124) から導かれる Euler 方程式

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^\zeta}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_i^\zeta}\right)=0 \tag{127}$$

の型のものであることを意味する．仮定により $\mathfrak{L}$ は不変量であるから，(127) 式はどの慣性系でも同じ形を有する．

場の方程式 (127) を使えば，

$$\theta_{ik}=-\sum_\zeta\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_k^\zeta}Q_i^\zeta+\mathfrak{L}\delta_{ik} \tag{128}$$

という量は発散公式

$$\frac{\delta\theta_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{129}$$

を満足することを容易に示すことができる．実際，(126) からえられる関係 $\dfrac{\partial Q_i^\zeta}{\partial x_k}=\dfrac{\partial Q_k^\zeta}{\partial x_i}$ を用い

$$\frac{\partial\theta_{ik}}{\partial x_k}=-\sum_\zeta\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_i^\zeta}\,\frac{\partial Q_i^\zeta}{\partial x_k}-\sum_\zeta\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_k^\zeta}\right)Q_i^\zeta+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_i}$$

$$=-\sum_\zeta\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_k^\zeta}\,\frac{\partial Q_i^\zeta}{\partial x_k}-\sum_\zeta\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^\zeta}Q_i^\zeta+\sum\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^\zeta}\,\frac{\partial Q^\zeta}{\partial x_i}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_k{}^\zeta}\,\frac{\partial Q_k^\zeta}{\partial x_i}\right)=0$$

となる．

したがって，(128) で定義される量 θ_{ik} を場のエネルギー・運動量テンソルと考えることができる.

$\mathfrak{L}$ が不変量であるときは，θ_{ik} がテンソルであることはすぐにわかる．これを正準エネルギー・運動量テンソルという．その時間成分 T_{44} は $-\mathfrak{H}$ に等しい．ただし

$$\mathfrak{H}=\sum_{\zeta}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_4^{\zeta}}Q_4^{\zeta}-\mathfrak{L}=\sum_{\zeta}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{Q}^{\zeta}}\dot{Q}^{\zeta}-\mathfrak{L} \tag{130}$$

は Hamilton 函数の密度である.

スカラー場の場合は，θ_{ik} の式 (128) はそのまま (121) で与えられるテンソル T_{ik} になる．しかし，一般の場合には，θ_{ik} は対称テンソルではなく，発散が零であるようなテンソル t_{ik} だけ，本当のエネルギー・運動量テンソルと異なる．すなわち

$$T_{ik}=\theta_{ik}+t_{ik}=T_{ki} \tag{131}$$

ただし，

$$t_{ik}-t_{ki}=-(\theta_{ik}-\theta_{ki}), \qquad \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{132}$$

である.

Belinfante† と Rosenfeld‡ は t_{ik} を計算する一般式を与えている.

もう1つの例として，第V章で取り扱った真空中における電磁場についてもう一度考えることにしよう．この場合，場の変数 θ^{ζ} は4元ポテンシャル A_k の成分であり，函数 $\mathfrak{L}$ は，

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}&=-\frac{1}{4}F_{lm}F_{lm}=-\frac{1}{4}(A_{lm}-A_{ml})(A_{lm}-A_{ml})\\&=-\frac{1}{2}(A_{lm}A_{lm}-A_{lm}A_{ml})\end{aligned} \tag{133}$$

ただし，

$$A_{lm}\equiv\frac{\partial A_l}{\partial x_m}$$

である．そのときは Euler の方程式 (127) は真空中における Maxwell の方程式 (V. 16) の形

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ki}-A_{ik})=\frac{\partial}{\partial x_k}F_{ik}=0 \tag{134}$$

または

---

† F. J. Belinfante, *Physica*, **6**, 887 (1939): ibid. **7**, 305 (1940)

‡ L. Rosenfeld, *Memoires de l'Acad. Roy. Belgique*, **6**, 30 (1940)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k \partial x_k}=0$$

をとる．附加条件と見なすべき Lorentz 条件 (V. 22) と合わせて，これは波動方程式

$$\Box A_i=0$$

を与える．

この場合，正準エネルギー・運動量テンソル (128) は

$$\theta_{ik}=\sum_l F_{kl}A_{li}-\frac{1}{4}(F_{lm}F_{lm})\delta_{ik} \tag{135}$$

となる．このテンソルは対称ではない．これは対称なエネルギー・運動量テンソル (V. 106) と

$$t_{ik}=-A_{il}F_{kl} \tag{136}$$

だけ異なる．そして (134) とテンソル F_{kl} が反対称であるという条件により，

$$\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k}=0$$

を満足する．

第 VII 章

閉じていない系. 誘電体および常磁性体内における電磁力学. 熱力学

69. 閉じていない系の一般的な性質

ある閉じた系 Σ は全エネルギー・運動量テンソル T_{ik} を2つの部分

$$T_{ik}=T_{ik}^{(1)}+T_{ik}^{(2)} \tag{1}$$

に分けるのに応じて，2つの閉じていない系 $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$ に分けられる. T_{ik} を2つに分ける方法は沢山あるから，系を2つの閉じない系に分ける方法もそれに応じただけある. 系 Σ が帯電体の場合には $T_{ik}^{(1)}$ に力学的エネルギー・運動量テンソル，$T_{ik}^{(2)}$ に電磁テンソルをとれば，これが1例である.

$$f_i=-\frac{\partial T_{ik}^{(2)}}{\partial x_k}$$

で4元ベクトル f_i を定義すると (1) と (VI. 1) から次の関係が成立する.

$$\frac{\partial T_{ik}^{(1)}}{\partial x_k}=-\frac{\partial T_{ik}^{(2)}}{\partial x_k}=f_i. \tag{2}$$

この場合 f_i は系 $\Sigma^{(2)}$ によって生じた4元力の密度で，系 $\Sigma^{(1)}$ に作用する. このように閉じていない系の基礎方程式は

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=f_i=-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{2'}$$

の形に書ける. ここで f_i はテンソル T_{ik} で指定される系に作用する力である. したがってテンソル S_{ik} で指定される系に作用する力は $-f_i$ になる.

閉じていない系のエネルギー・運動量テンソルの空間時間成分 T_{i4} および T_{4i} の物理的な意味は閉じた系の場合と同じである. すなわち h, $\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{g}$ でそれぞれ閉じていない系のエネルギー密度，エネルギー流および運動量密度を表わせば，(VI. 2, 3) と同じ関係式

$$T_{4\iota}=\frac{i}{c}S_\iota,\ T_{\iota 4}=icg_\iota,\ T_{44}=-h,\ g_i=\frac{1}{ic}T_{i4}=\left(\boldsymbol{g},\ \frac{i}{c}h\right) \tag{3}$$

が成立する. しかし閉じていない系では，閉じた系で成立する (VI. 4), (VI. 5) の両式にの代りに

$$\frac{\partial g_\iota}{\partial t}+\frac{\partial T_{\iota\kappa}}{\partial x_\kappa}=f_\iota,\qquad \frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}=\frac{c}{i}f_4 \tag{4}$$

が成立する. これは (IV. 238, 236) と照合すればわかるように閉じていない系における運動量とエネルギーに関する基本定理を表わしている,

T_{ik} を 2 つの部分に分ける分け方 (1) は任意であるから, 閉じていない系のエネルギー・運動量テンソルは必ずしも対称である必要はないが, とにかくどんな場合でも

$$T_{ik}-T_{ki}=-(S_{ik}-S_{ki}) \tag{5}$$

は成立していなくてはならない.

閉じていない有限な系の全運動量とエネルギー

$$G_i=\int g_i dV=\int \frac{T_{i4}}{ic}dV=\left(\boldsymbol{G},\ \frac{i}{c}H\right)$$

は一般には時間が経つにつれて変わる量である. 任意の慣性系 S において (2′) を全物理空間にわたって積分すれば

$$\frac{d}{dt}\int \frac{T_{i4}}{ic}dV=\frac{d}{dt}G_i=\int f_i dV \tag{6}$$

がえられる.

閉じていない系の運動量とエネルギーをある慣性系では $G_i(t)$ で, 他の慣性系では $G_i'(t')$ で表わしたとき, $G_i(t)$ と $G_i'(t')$ との間の関係式は (VI. 31′) ではない. このことは, G_i と G_i' の中におのおのを指定する量として現われ変数 t と t' との間には何も一義的な関係がないということから明白である. しかも G_i と G_i' が時間が経っても変わらないような定常系においてすらも, G_i という量は 4 元ベクトルの成分と同じ変換はしない (§ 70 を見よ). G_i がベクトルでないことは閉じた系では G_i がベクトルの性質をもつことを示した § 63 の証明から直ちにえられる結論である. 閉じていない系では, (VI. 28) の代りに

$$\int_{\Omega_1} b_k dV_k+\int_{\Omega_2} b_k dV_k=\int_{\Sigma} f_i d\Sigma \tag{7}$$

が成立し, 上の (7) の右辺が零になる場合は閉じていない系の中では非常にまれな特別な場合になる.

角運動量 M_{ik} はやはり

$$M_{ik}=\int (x_i g_k-x_k g_i)dV \tag{8}$$

で定義されるが, これも時間の函数である. 閉じた系で成立した (VI. 33) に対して, いまの場合は

$$\frac{\partial(x_i T_{kl}-x_k T_{il})}{\partial x_l}=x_i f_k-x_k f_i+T_{ki}-T_{ik}$$

が成立する．この関係式は (2′) からえられる．この関係式を物理空間全域について積分すれば

$$\frac{d}{dt}M_{ik}=\int(x_i f_k-x_k f_i+T_{ki}-T_{ik})dV \tag{9}$$

がえられる．したがってこの場合には力のモーメントの密度 d_{ik} の定義としては

$$d_{ik}=x_i f_k-x_k f_i+T_{ki}-T_{ik}=x_i f_k-x_k f_i+S_{ik}-S_{ki} \tag{10}$$

を用いるべきであることになる．

次に閉じていない系では質量中心は物理的には重要ではないことを示そう．慣性系 S における質量中心の座標ベクトルは (VI. 36)

$$\boldsymbol{X}(S)=\frac{1}{H}\int h(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{x}dV=\frac{1}{G_4}\int \boldsymbol{x}g_4 dV \tag{11}$$

で定義されるが，$i=\iota$, $k=4$ とした (9) および $i=4$ とした (6) 式を用いて計算を進めれば

$$\frac{d\boldsymbol{X}(S)}{dt}=\frac{c^2\boldsymbol{G}}{H}-\frac{\boldsymbol{X}(S)}{G_4}\int f_4 dV+\frac{1}{G_4}\int \boldsymbol{x}f_4 dV$$
$$+\frac{1}{G_4}\int\left(\frac{i}{c}\boldsymbol{S}-ic\boldsymbol{g}\right)dV \tag{12}$$

がえられる．(12) を見れば質量中心の速度は，エネルギー・運動量テンソルが対称の場合でも，閉じた系の場合のように $c^2\boldsymbol{G}/H$ に等しくはならない．これでは物理系を表示する点としての質量中心の価値は，非常にせまい範囲に限られてしまう．

閉じた系の**固有質量中心**とは系の静止座標系における質量中心のことであった．閉じていない系については，その系のある時刻の静止系（この静止系は時刻が違えば当然違ったものになる）の質量中心になるような系の代表点が定義できるかどうかを考えこれについて詳しく研究したところ†，この定義だけでこのような代表点を一義的にきめられないことがわかった．実は閉じた系においてすら，どんな時刻でもその時刻の静止系の質量中心になるような点は無限個あることがわかった．それは§64 で定義したような，固有質量中心の静止系 S_0 で一定の角速度

$$\boldsymbol{\omega}^0=-\frac{M_0c^2}{|\boldsymbol{m}^0|^2}\boldsymbol{m}^0 \tag{13}$$

で回転する円板について考察すると，この場合回転円板上の点はどれでも皆時時刻々の静止系の質量中心になってしまうことが次のようにして示されるから

† C. Møller, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **11**, fasc. v, 251 (1950)

である．すなわち着目した時刻に円板の中心からの動径が $\boldsymbol{a}$ であるような点 p では，その速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{\omega}^0\times\boldsymbol{a})=-\frac{M_0c^2}{|\boldsymbol{m}^0|^2}(\boldsymbol{m}^0\times\boldsymbol{a}) \tag{14}$$

となり，したがって

$$\frac{\boldsymbol{m}^0\times\boldsymbol{v}}{M_0c^2}=-\frac{1}{|\boldsymbol{m}^0|^2}(\boldsymbol{m}^0\times(\boldsymbol{m}^0\times\boldsymbol{a}))=\boldsymbol{a} \tag{15}$$

が成立する．(15) を (VI. 48) と比較すると，点 p はたしかに点 p 自身の S^0 に対する速度と同じ速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している座標系 S における質量中心になっている．

閉じた系では，固有質量中心という特定の 1 点を条件 (VI. 40) を用いて選び出すことができた．(VI. 40) というのは固有質量中心の静止系では物理系の全運動量が零になることを示す式である．閉じていない系ではこのような選択はできない．その理由は次の通りである．上述のように定義された代表点の 1 つのある瞬間の静止系に方程式 (12) を適用すると，(12) の左辺が零であるから (12) からわかるようにこの慣性系では一般には運動量が零ではなくなる．またたとえある特定の時刻に運動量が零であったとしても，時刻が経てば零でなくなる．このようにして閉じていない系の Newton 的な重心を一義的に拡張することができるのは，外力が非常に特別な性質をもっているときにかぎられている (§70 を見よ)．しかし第 X 章，§114 でわかるように，これには唯 1 つの重要な例外がある．すなわち外力が重力であって，取り扱う系が十分小さい場合には，Newton 的な重心の性質をすべて保有している固有質量中心を一義的に定義することがつねに可能となる．

70.　静的な閉じていない系

考えている系のエネルギー・運動量テンソルをふたたび T_{ik} で表わすが，今度は f_i はその系によって**作られた** 4 元力の密度を表わすものとする．そのときは，(2)′ により，任意の慣性系内で

$$f_i=-\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{16}$$

となる．ある座標系 S^0 内で，あらゆる物理量が時間に無関係となり，しかも，さらに，

$$\boldsymbol{G}^0=\int\boldsymbol{g}^0dV^0=\int\boldsymbol{S}^0dV^0=0 \tag{17}$$

となるような S_0 が存在するとき，この系は静的であるという．すなわち S^0

系では，この系は全体として静止している．また S^0 では，あらゆる物理量が時間によらないから，(11) で定義される S^0 系での重心は S^0 系中で静止している．したがって，いま考えているこの系は，閉じていない系に対してもNewton の重心の定義があいまいさなしに一般化できる場合の1例である．

1例として，特定の座標系 S^0 中に静止する荷電物質の電磁場をあげることができる．この場合にはテンソル T_{ik} は，電磁エネルギー・運動量テンソル S_{ik} に等しく $\varepsilon=\mu=1$ なる物質については，これは，(V. 106) 式で与えられる．そしてこのとき f_i はその荷電物質に作用する4元的な電磁力の密度になる．

静的な閉じていない系の他の1例は，容器に入れられた流体で容器の壁から受ける外圧によって，この容器に閉じこめられている場合である．

S^0 に対して一定の速度 $\boldsymbol{u}$ で動いている慣性系 S 内ので全エネルギーおよび運動量を求めるにはテンソルの変換性と変換係数 α_{ik} の表示 (VI. 87) を用いればよい．

$$T_{ik}=T^0_{lm}\alpha_{li}\alpha_{mk} \tag{18}$$

なる式を全空間について積分し，Lorentz の式

$$dV=dV^0\sqrt{(1-u^2/c^2)}$$

と (17) を用いれば

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{G}&=\int \boldsymbol{g}\,dV=\frac{\boldsymbol{u}\left[H^0+(1/u^2)\left(\boldsymbol{u}.\int \boldsymbol{T}^0dV^0.\boldsymbol{u}\right)\{1-\sqrt{(1-u^2/c^2)}\}\right]}{c^2\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\\&\qquad+\frac{1}{c^2}\left(\int \boldsymbol{T}^0dV^0.\boldsymbol{u}\right)\\H&=\int h\,dV=\frac{H^0+(1/c^2)\left(\boldsymbol{u}.\int \boldsymbol{T}^0dV^0.\boldsymbol{u}\right)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

をえる．$\boldsymbol{T}^0$ は，成分が $T^0_{\kappa\iota}$ の空間テンソルを表わす．$\boldsymbol{G}, H$ は時間について一定であるが，4元ベクトルのようには変換しない．一般に，このことが，考えている系が閉じていない系であるということの証拠であると考えてよい．弾性体の場合には，$\boldsymbol{u}$ がその物体内到る処一定であると見なして (VI. 92, 89) を積分することによって (19) がえられる．このような系は物体の到る処で，応力テンソル $\boldsymbol{t}^0=\boldsymbol{T}^0=0$ でない限り，閉じた系ではありえない．

$\boldsymbol{T}^0$ が

$$T^0_{\iota\kappa}=p^0\delta_{\iota\kappa} \tag{20}$$

という形のときは，(19) は完全流体の式 (VI. 112) と同じになる．

71. 静電系．電子の古典模型

この節では，帯電体がある座標系 S^0 で静止している場合を少し立ち入って考察する．$\varepsilon=\mu=1$ とすれば，この場合のテンソル S_{ik} は (V. 106) から (V. 114) までの関係式を満足する．帯電体が静止している座標系を S^0 とすれば，S^0 においては場は静電場である．すなわち S^0 では，$\boldsymbol{H}^0=0$ でかつ，$\boldsymbol{E}^0$ は時間が経っても不変である．したがってエネルギー密度 h^0，エネルギー流 $\boldsymbol{S}^0$，電磁運動量密度 $\boldsymbol{g}^0$，Maxwell の応力テンソル $S_{\iota\kappa}$ を求めると，

$$\left.\begin{aligned} h^0&=\frac{1}{2}|\boldsymbol{E}^0|^2, \qquad \boldsymbol{S}^0=\boldsymbol{g}^0=0, \\ S^0_{ik}&=-E^0_\iota E^0_\kappa+\frac{1}{2}|E^0|^2\delta_{\iota\kappa} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ここでさらに電荷の分布が球対称になっているという場合に限ることにする．この場合は場も球対称となり，ある点の電場 $\boldsymbol{E}^0$ は，電荷分布の中心とその点を結ぶ動径ベクトルの方向に向いている．そこで

$$\left.\begin{aligned} &\int \boldsymbol{E}^0_\iota \boldsymbol{E}^0_\kappa dV^0=\frac{1}{3}\int|\boldsymbol{E}^0|^2dV^0\delta_{\iota\kappa} \\ &\int S_{\iota\kappa}dV^0=\frac{1}{6}\int|\boldsymbol{E}^0|^2dV^0\delta_{\iota\kappa}=\frac{1}{3}\int h^0dV^0\delta_{\iota\kappa}=\frac{1}{3}H^0\delta_{\iota\kappa}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ここで H^0 は S^0 系における全エネルギーである．球対称分布をしている電荷が速度 $\boldsymbol{u}$ で運動しているときの電磁的な全運動量 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{el}}$ と電磁的な全エネルギー H_{el} をえるには (22) を (19) 代入すればよい．その結果は

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{el}}=\frac{4}{3}\frac{H^0_{\mathrm{el}}}{c^2}\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \qquad H_{\mathrm{el}}=H^0_{\mathrm{el}}\frac{1+\frac{1}{3}u^2/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}. \tag{23}$$

ただし H^0_{el} は電荷の静止系における電磁的な全エネルギーである．

Lorentz の電子論の基礎方程式は $\epsilon=\mu=1$ である物質における Maxwell の方程式と一致しているので，上述の荷電系がちょうど電子の古典模型を表わしている．Lorentz は電子の質量，エネルギー，運動量の起源をすべて電磁的なものに求める立場をとることを提唱したが，(23) を見ればそれは不可能であることがわかる†．すなわち (23) 式から電磁エネルギーの速度への依存性が粒子のエネルギーに関する相対論の公式 (III. 31) と違うからである．$(\boldsymbol{G}_{\mathrm{el}}, (i/c)H_{\mathrm{el}})$ という量が 4 元ベクトルの成分と違う変換規則に従うことから，電子は閉じていない系の典型的なものである．したがって Maxwell の方程式が全空間にわたって成立していることを認めるかぎり，電子の矛盾のない古典的描

†M. Abraham, *Phys. ZS.* 25. 5, 576 (1904)

像を作るためには，電子の内部に電磁的でないエネルギーや運動量が存在するということを仮定することが必要となる．

そこで静止系では電荷 e が表面に一様に分布している半径 a の弾性球を電子の模型にしてみる．動径ベクトルの方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ で表わして Maxwell の方程式を解けば

$$r>a \text{ では } \boldsymbol{E}^0=\frac{e}{4\pi r^2}\boldsymbol{n},\quad r<a \text{ では } \boldsymbol{E}^0=0,\quad \text{および } \boldsymbol{H}^0=0, \tag{24}$$

をえる．ただし r は球の中心からの距離である．これを (21) に代入すれば $S^0_{\iota\kappa}$, H^0_{el} は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} S^0_{\iota\kappa}&=-\frac{e^2}{(4\pi)^2r^4}n_\iota n_\kappa+\frac{1}{2}\frac{e^2}{(4\pi^2)r^4}\delta_{\iota\kappa} \qquad (r>a)\\ H^0_{\mathrm{el}}&=\frac{1}{2}\int|\boldsymbol{E}^0|^2dV^0=\frac{e^2}{(4\pi)^2 2}4\pi\int_a^\infty\frac{r^2dr}{r^4}=\frac{e^2}{8\pi a}=m_0^{\mathrm{el}}c^2\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ここに電荷 e は Heaviside 単位を用いて表わした．また m_0^{el} は電磁場の粒子の静止質量への寄与を表わしている．

球の表面の単位面積あたりに作用する電気力は (V. 109) より

$$t^{\mathrm{el}}_\iota=-S^0_{\iota\kappa}n_\kappa=\frac{e^2}{2(4\pi)^2a^4}n_\iota \tag{26}$$

となり，これは弾性力とつりあっているはずである．したがって球の内部における弾性応力テンソル $t^0_{\iota\kappa}$ の形は

$$t^0_{\iota\kappa}=p^0\delta_{\iota\kappa}, \tag{27}$$

ただし

$$p^0=-\frac{e^2}{2(4\pi)^2a^4}=-\frac{H^0_{\mathrm{el}}}{4\pi a^3} \tag{28}$$

となる．(VI. 112) にしたがって力学的な全エネルギーと全運動量を計算すれば

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{\mathrm{me}}&=\frac{H^0_{\mathrm{me}}+p^0V^0}{c^2}\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\left(m_0^{\mathrm{me}}-\frac{1}{3}\frac{H^0_{\mathrm{el}}}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\\ H_{\mathrm{me}}&=\frac{H^0_{\mathrm{me}}+(p^0V^0/c^2)u^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{m_0^{\mathrm{me}}-\frac{1}{3}(H^0_{\mathrm{el}}/c^2)u^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

(23) と (29) の和を作れば全エネルギー，全運動量が求められる．すなわち

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G}&=\boldsymbol{G}_{\mathrm{me}}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{el}}=\frac{(H^0_{\mathrm{me}}+H^0_{\mathrm{el}})}{c^2}\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{H^0}{c^2}\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\\ H&=H_{\mathrm{me}}+H_{\mathrm{el}}=\frac{(H^0_{\mathrm{me}}+H^0_{\mathrm{el}})}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{H^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

となり，閉じた系のエネルギーと運動量になっている．この模型は Poincaré がはじめて用いた電子の模型†であるが，彼は電子の中で電気力を打ち消す力の本性を特に規定しなかった．Poincaré はただ電磁的ではない力が存在すること，およびその力に対応するエネルギー・運動量テンソルと電磁テンソルの和で作った全エネルギー・運動量テンソル T_{ik} が $\partial T_{ik}/\partial x_k=0$ をみたすことを仮定しただけであった．この $\partial T_{ik}/\partial x_k=0$ という方程式は閉じた系の特性である．

非電磁的な性質をもつ場の量を是非導入しなければならないこの二元的な立場と正反対の一元的な立場を支持したのが Mie‡ と Born§ で，導入される場の量はもちろん電磁場のみである．ただし電子の内部は場が非常に強いので，電子内部で場の量のみたす方程式には Maxwell の方程式からずれたものを用いる．この方程式はもはや線型ではないが，エネルギー・運動量テンソル S_{ik} が必要条件 $\partial S_{ik}/\partial x_k=0$ をみたすようにはなっている．この条件は自己力 $f_i=-\partial S_{ik}/\partial x_k$ が零であることを表わす条件である．

この，電子をはじめ他の素粒子に関する問題の最終的な解を古典論にたって求めることは多分絶望的ではないかと思う．この問題解決には Planck の作用量子の導入が必要であるが，これに加えてさらに長さの次元をもつ基本定数‖を新しく導入することがどうしても必要であるであろう．ともあれ，この節での考察によれば，系のエネルギー・運動量テンソルの存在を認めるかぎり，相対性理論からは，自己力がなくなること，すなわちこのテンソルの 4 次元的発散が零になることが必然的に要求される．

72. 定常運動をする物体中の電磁力学の基礎方程式

Lorentz†† が示した通り，定常運動をしている物体の Maxwell の現象論的な電磁力学の方程式は巨視的に見れば小さいが，それでもなおその中に含まれる電子の数が莫大であるような領域についての平均化を行なうことによって，電子論の基礎方程式から導くことができる．電子論の基礎方程式(V. 13, 16)は共変的な形になっているので，運動物体中の(巨視的)な電磁力学の方程式は適当に小さくとった時空領域についての平均によってえられるはずである．この

† H. Poincaré, *Rend. Pal.* **21**, 129 (1906)

‡ G. Mie, *Ann. d. Phys.* **37**, 511 (1912); **39**, 1 (1912); **40**, 1 (1913)

§ M. Born, *Proc. Roy. Soc.* A, **143**, 410 (1934)

‖ W. Heisenberg, *Ann. d. Phys.* **32**, 20 (1938)

†† 第 I 章 19 頁を見よ．

方法は Born† と Dällenbach‖ によって行われた.

また，一方静止系における Maxwell の現象論的な方程式が正しいことを認めれば，運動物体中の同じ方程式は Lorentz 変換によってえられるはずであって，最初にこの方法を用いたのは Minkowski†† である．相対性理論によれば物体が静止している座標系を S^0 とすれば，定常運動中の物体に対する Maxwell の方程式はやはり S^0 においても成立する．そしてこのさい S^0 の恒星に対する速度のことは考慮する必要はない．この結果を式で書けば S^0 では

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{curl}^0\,\boldsymbol{E}^0+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}^0}{\partial t^0}&=0, \quad \mathrm{div}^0\,\boldsymbol{B}^0=0 \\ \mathrm{curl}^0\,\boldsymbol{H}^0-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}^0}{\partial t^0}&=\boldsymbol{J}^0/c, \quad \mathrm{div}^0\,\boldsymbol{D}^0=\rho^0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

が成立するということである．上式で $\boldsymbol{E}^0$ は電場の強さ，$\boldsymbol{D}^0$ は電束密度，$\boldsymbol{H}^0$ は磁場の強さ，$\boldsymbol{B}^0$ は磁気誘導で，ρ^0 は巨視的な電荷密度，$\boldsymbol{J}^0$ は巨視的な電流密度である．これらの量はすべて原理的には S^0 内の巨視的な実験で決められる．たとえば，電場に平行な物質の中に小さな割れ目をつくってその中に単位の電荷をもった小さな試験体を入れたとき，これが受ける力が $\boldsymbol{E}^0$ であり，電場に垂直な割れ目で同じ物体の受ける力が $\boldsymbol{D}^0$ である．$\boldsymbol{H}^0$, $\boldsymbol{B}^0$ は磁極の強さが 1 の磁気をもった試験体が受ける力で測られる．

等方性の誘電体や常磁性体では，方程式 (31) に加えて，物質の構造と場を表わす変数との間に次のような方程式が成立する．

$$\boldsymbol{D}^0=\varepsilon\boldsymbol{E}^0, \qquad \boldsymbol{B}^0=\mu\boldsymbol{H}^0, \qquad \boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}^0, \tag{32}$$

ただし ϵ は誘電率，μ は透磁率，σ は電気伝導度を表わす．(32) の最後の式は Ohm の法則の数学的な表現である．

73. 一様な運動をしている物体における Minkowski の場の方程式

先ず 2 つの反対称テンソル F_{ik} と H_{ik} とを導入する．(IV. 80, 80′) を用いれば，テンソル F_{ik} から 1 組の空間ベクトル $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$ を次のようにして作ることができる．すなわち F_{ik} を任意の座標系 S におけるテンソルの成分とすれば，S における $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ は，

$$\boldsymbol{B}=(F_{23}, F_{31}, F_{12}), \qquad i\boldsymbol{E}=(F_{41}, F_{42}, F_{43}) \tag{33}$$

で与えれら，かつ $\boldsymbol{B}$ は軸性ベクトル，$\boldsymbol{E}$ は極性ベクトルになっている．テン

---

† Minkowski-Born, *Math. Ann.* **68**, 526 (1910); また A. D. Fokker, *Phil. Mag.* **39**, 404 (1920) 見よ．

‖ W. Dällenbach, Diss., Zürich, 1918; *Ann. d. Phys.* **58**, 523 (1919)

†† Minkowski, H., *Gött. Nachr.*, p. 53 (1908); *Math. Ann.* **68**, 472 (1910)

ソル H_{ik} からも全く同じようにして極性ベクトル $\boldsymbol{D}$ と軸性ベクトル $\boldsymbol{H}$ とを作ることができる．

$$\boldsymbol{H}=(H_{23}, H_{31}, H_{12}), \qquad i\boldsymbol{D}=(H_{41}, H_{42}, H_{43}), \tag{34}$$

これに加えて S 系における成分が次式で与えられる 4 次元ベクトル J_i を導入する．

$$J_i=(\boldsymbol{J}/c, i\rho), \tag{35}$$

テンソル F_{ik}, H_{ik} ベクトル J_i のある 1 つの座標系での成分が与えられさえすれば他のどんな座標系における成分も，反対称テンソルの変換公式 (IV. 81′) およびベクトルの変換公式 (IV. 29) を用いることによって計算できる．たとえば J_i の成分については次式を用いればよい．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{J}&=\boldsymbol{J}'+\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}\frac{(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{J}')(1-\sqrt{(1-v^2/c^2)})+\rho' v^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \\ \rho&=\frac{\rho'+(1/c^2)(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{J}')}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

ただし v は S 系に対する S' 系の速度である．

以上で定義した量 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{J}, \rho$ が物質の静止系 S^0 での電磁場を示す変数 $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{D}^0$, $\boldsymbol{H}^0$, $\boldsymbol{B}^0$, $\boldsymbol{J}^0$, ρ^0 に一致するようにテンソル F_{ik}, H_{ik}, J_i を定義すると，任意の座標系における電磁力学の方程式は次のような形に書けることになる．

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0, \tag{37 a}$$

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k}=J_i. \tag{37 b}$$

静止系 S^0 では方程式 (37) は Maxwell の方程式に一致することになっており，かつ (37) はテンソル方程式であるから，この方程式は任意の慣性系で成立するはずである，(IV. 187) があるので，F_{ik} に対偶な擬テンソル F^*_{ik} を用いれば (37a) は

$$\frac{\partial F^*_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{37 a′}$$

のように変形できる．

(33), (34), (35) および (37) からあらゆる座標系で

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{38 a}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{J}}{c}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho \tag{38 b}$$

が成立する．また (37 b) から連続方程式

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 H_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}\equiv 0 \tag{39}$$

がえられることから，$J_i=(\boldsymbol{J}/c, i\rho)$ という量は座標系 S における電流密度と電荷密度とすることができる．

絶縁体では，静止系において $\boldsymbol{J}^0=0$ が成立するから，(36) から

$$\rho=\frac{\rho^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \qquad \boldsymbol{J}=\frac{\rho^0 \boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\rho \boldsymbol{u} \tag{40}$$

がえられる．ただし $\boldsymbol{u}$ はこの絶縁体の S 系に対する速度である．したがって体積 $\delta V=\delta V^0\sqrt{(1-u^2/c^2)}$ をもつ微小物質片が帯びている荷電 δe は

$$\delta e=\rho\delta V=\rho^0\delta V^0 \tag{41}$$

を満たすので，不変量である．また電流 $\boldsymbol{J}$ は純粋な携帯電流である．

一般の場合には，電流はつねに携帯電流 $\rho\boldsymbol{u}$ と伝導電流 $\boldsymbol{C}$ との和の形に書けるが，

$$\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{u}+\boldsymbol{C}, \tag{42}$$

この分け方は相対論に不変にはなっていない．静止系で $\rho^0=0$ であれば，$\boldsymbol{J}^0=\boldsymbol{C}^0$ となって静止系では電流は純粋に伝導電流のみとなるが，この場合でも S 系では荷電密度 ρ は零ではなくなり，この結果 S 系では携帯電流 $\rho\boldsymbol{u}\neq 0$ が現われることになる．この場合を具体的に (36) から求めて見れば

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{J}&=\boldsymbol{C}^0+\frac{\boldsymbol{u}}{u^2}\frac{(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{C}^0)\{1-\sqrt{(1-u^2/c^2)}\}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\rho\boldsymbol{u}+\boldsymbol{C} \\ \rho&=\frac{(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{C}^0)}{c^2\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^0+\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{C}^0)}{u^2}\{(1-u^2/c^2)-1\} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

さて ρ^0, U_i, s_i を下に述べるような量とすれば，これらの量を用いて次式のように J_i を分けた分解法は相対論的に不変である．

$$J_i=\frac{\rho^0 U_i}{c}+s_i \tag{44}$$

ここで ρ^0 は物質の静止系 S^0 における荷電密度（不変量）であり，

$$U_i=\left\{\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \frac{ic}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\right\}$$

はこの物体の4元速度である．また $s_i=(\boldsymbol{s}, s_4)$ は静止系 $\boldsymbol{S}^0$ で

$$s_i^0=(\boldsymbol{J}^0/c, 0) \tag{45}$$

という成分をもつ4元ベクトルとする．s_i については

$$\left.\begin{aligned} &s_i U_i=s_i^0 U_i^0\equiv 0, \qquad J_i U_i=-c\rho^0 \\ &s_i=J_i+(1/c^2)(J_l U_l)U_i \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

が成立する．

場の方程式 (38) 中に現われる量の中 $\boldsymbol{J}$ には直接の物理的意味がつけられるが，場に示す変数 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ は静止系の場合を除いては物理的な意義がかんたんにつけられない．静止系 S^0 での場を示す変数 $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{D}^0$, $\boldsymbol{H}^0$, $\boldsymbol{B}^0$ は簡単な巨的視実験で定められ，その意味は明瞭である．ここまでのところでは，これら $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ などの場を示す変数は変換公式を仲介として静止系 S^0 における場を示す変数で表わされている量としかいえない．

$$F_i = \frac{1}{c} F_{ik} U_k \tag{47}$$

で 4 元ベクトル F_i を定義すれば，S 系における F_i の成分は (33) より

$$F_i = \left(\frac{\boldsymbol{E} + (1/c)(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\boldsymbol{E}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right). \tag{48}$$

したがってこのベクトルの静止系での成分は

$$F_0^i = (\boldsymbol{E}^0, 0) \tag{49}$$

となり，物質中電場の方向に入れた割れ目の中に物質に対して静止している単位電荷に作用する 4 元力になっている．さらに

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{50}$$

によって $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ を導入すれば (48) は

$$F_i = \left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{E}}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\widetilde{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right), \tag{51}$$

となり，これを (IV. 54) とくらべれば $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ は座標系 S で測定に用いられている試験体に作用する力であることがわかる．

同様に，次の 4 元ベクトル

$$K_i = \frac{1}{c} H_{ik} U_k = \left(\frac{\boldsymbol{D} + (1/c)(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H})}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\boldsymbol{D}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right)$$

$$= \left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{D}}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\widetilde{\boldsymbol{D}}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right) \tag{52}$$

は静止系での成分は $K_i^0 = (\boldsymbol{D}^0, 0)$ となるが，これは電場に垂直に入れた割れ目の中の単位電荷をもつ試験体に作用する力を示している．したがって

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \tag{53}$$

は座標系 S で測定に用いられる試験体に作用する力という簡単な物理的な意味をもつことになる．

以上に加えて，F_{ik} および H_{ik} に対偶な擬テンソルを F_{ik}^*, H_{ik} として

(IV. 108, 109 を見よ) 次の2つの擬ベクトルを作る.

$$F_i^* = \frac{1}{c} F_{ik}^* U_k = \left(\frac{\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{E})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right)$$

$$= \left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\widetilde{\boldsymbol{B}}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right), \tag{54}$$

$$K_i^* = \frac{1}{c} H_{ik}^* U_k = \left(\frac{\boldsymbol{H} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\boldsymbol{H}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right)$$

$$= \left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{H}}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\ \frac{i(\widetilde{\boldsymbol{H}}.\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \right) \tag{55}$$

F_i^* と K_i^* とは, それぞれ物質にあけた横方向の割れ目, 縦方向の割れ目に入って, 物質に対して静止している単位磁極に作用する. 4元力になっている. このことはこれらの擬ベクトルの静止系における成分をながめれば, 一目瞭然である. したがって

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{E}}{c}, \tag{56}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}}{c} \tag{57}$$

は座標系Sで測定に用いられる単位磁極に作用する力となる.

ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\boldsymbol{D}}, \widetilde{\boldsymbol{H}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}$ (したがって4元ベクトル F_i, K_i, F_i^*, K_i^*) はこのようにして原理的には座標系S上の観測者が行なう物理測定によって直接求めることができる. さて F_{ik}, H_{ik} を (50), (53), (56), (57) を用いて F_i, K_i, F_i^*, K_i^* で表した結果は

$$\left.\begin{aligned} F_{ik} &= \frac{1}{c}(U_i F_k - U_k F_i) + \frac{1}{ic}\delta_{iklm} F_l^* U_m \\ H_{ik} &= \frac{1}{c}(U_i K_k - U_k K_i) + \frac{1}{ic}\delta_{iklm} K_l^* U_m \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

である. ここで δ_{iklm} は §43 で定義した Levi-Civita 記号である. (58) の両辺の各々はテンソル成分と同じ変換性をもっているから (58) 式は一般に成立し, したがってまた静止系 S^0 においても成立するものである.

ベクトル $\boldsymbol{u}$ は一定であるから

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = -(\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{B}$$

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}) = -(\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{D} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = -(\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{D} + \rho\boldsymbol{u}$$

が成立し, これを用いると場の方程式 (38) は次のように書ける.

$$\operatorname{curl}\widetilde{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = 0, \qquad \operatorname{curl}\widetilde{\boldsymbol{H}} - \frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{D}}{dt} = \boldsymbol{C}/c \tag{59}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \tag{60}$$

ただし上式中の

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{B},\quad \frac{d\boldsymbol{D}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{D}$$

は$\boldsymbol{B}$，および $\boldsymbol{D}$ の物質についての時間微分演算を意味し，$\boldsymbol{C}$ は (42) で与えられる伝導電流を表わしている．

いままでは一定の速度 $\boldsymbol{u}$ で運動している物体が唯 1 つの場合であった．しかし場の方程式が線型であるために場には加法性が成立することになり，いくつかの物体が真空によって間をへだてられて，おのおのが互に異なる速度で一様な運動をしている場合にも，(37) を適用してさしつかえない．さらに，電磁力のために生じた物体の加速度が小さいと見てよい場合には，方程式 (37) は運動物体から成る系に対してよい近似を与えることになる．

74. 物質構造に関する式の 4 次元的表現．境界条件

(32) のはじめの 2 式によれば，場の方向に平行または直角に掘られた割れ目の中にもちこまれた単位の強さの試験体に作用する力は，互に比例し，その比例定数は，試験体が点電荷のときは ϵ，磁極のときは μ である．したがって

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}=\epsilon\widetilde{\boldsymbol{E}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{B}}=\mu\widetilde{\boldsymbol{H}},\tag{61}$$

あるいは

$$K_i=\epsilon,\qquad F_i^*=\mu K_i^*\tag{62}$$

とならなければならない．これ等の式はまた

$$H_{ik}U_k=\epsilon F_{ik}U_k,\tag{63 a}$$

$$F_{ik}^*U_k=\mu H_{ik}^*U_k\tag{63 b}$$

とも書ける．この 2 番目の式はテンソルの式

$$F_{ik}U_l+F_{kl}U_i+F_{li}U_k=\mu(H_{ik}U_l+H_{kl}U_i+H_{li}U_k)\tag{63 c}$$

と同等である．静止系で (61), (62) または (63) は (32) のはじめの 2 つの式になる．(32) の最後の式，すなわち Ohm の法則は

$$s_i=\sigma F_i/c\tag{64}$$

という形に書ける．このことはベクトル式 (64) を静止系で書き下してみれば，(45) および (49) から明らかである．なぜなれば，$s_iU_i=F_iU_i=0$ によって，(64) のはじめの 3 成分だけが独立である．すなわち (64) は

$$\boldsymbol{s}=\frac{\sigma\widetilde{\boldsymbol{E}}/c}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\tag{65}$$

と同等だからである．

(46) と (47) により，Ohm の法則は

$$J_i+\frac{(J_kU_k)}{c^2}U_i=\frac{\sigma}{c^2}F_{ik}U_k \tag{66}$$

と書くこともできる.

荷電と電流の分布がわかっているとき，これらの物質構造に関する式 (63) および (66) と場の方程式 (37) から，場を決定することができる.

物質と真空との境界では，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ の境界面に平行な方向の成分が連続でなければならない. このことは普通やられているように，(59) 式を物質の境界面のすぐ内側と外側に相対する 2 辺をもつ，小さな矩形のかこむ無限小面内で積分することにより示すことができる. ただし，この場合 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ や $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ の定義に現われる $\boldsymbol{u}$ は，境界面の外側でも，物質の速度に等しいとおくものとする. また，境界のすぐ外側と内側に両端の底面をもつ小さな円筒について (60) を積分することにより $\boldsymbol{B}$ の垂直成分は境界において連続であるが，$\boldsymbol{D}$ の垂直成分は ΔD_n だけ変化し，この ΔD_n が境界面上の荷電の表面密度に等しいことを示すことができる.

75. 電磁的エネルギー・運動量テンソルと 4 元力の密度

s_i を電子論の電流密度とすれば，電子論での 4 元力の密度 f_i が

$$f_i=F_{ik}s_k$$

で与えられることは第V章で学んだ. 4 元力がこのような形に書けるということは，静止系の電荷に作用する力の密度が $\rho^0\boldsymbol{E}^0$ であるという電場の強さの基本的定義を見れば直ちにわかるべきことである. ϵ も μ も 1 と違った値をもっている物質で，その物質に作用する力の密度という量を一意的に表現することは決して容易ではない. 第一，その物質の静止系においても一般には伝導電流が存在するし，電場の強さは物質中に作った割れ目の中に置かれた単位の電荷を帯びた試験体の受ける力で定義されるため，絶縁体においても静止系で作用する力が $\rho^0\boldsymbol{E}^0$ であることは明らかではない. このような力の密度の定義の不確定さは当然電磁エネルギー・運動量テンソルの不確定さまでよび起すことになる.

ともあれ，ここでは先ず電子論における 4 元力の密度にならって $F_{ik}J_l$ という 4 元ベクトルを取り上げてみる. 場の方程式 (47) を用いて $F_{il}J_l$ を次のように変形する.

$$\begin{aligned}F_{il}J_l&=F_{il}\frac{\partial H_{lk}}{\partial x_k}=\frac{\partial(F_{il}H_{lk})}{\partial x_k}-\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}H_{lk}\\&=-\frac{\partial(F_{ik}H_{kl})}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l}\right)H_{lk}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial(F_{il}H_{kl})}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_i}H_{lk}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}(F_{il}H_{kl}) + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{lk}H_{lk}) + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial_{lk}}{\partial x_i}H_{lk} - F_{lk}\frac{\partial H_{lk}}{\partial x_i}\right],$$

したがって

$$F_{il}J_l + \frac{1}{4}\left[F_{kl}\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}H_{kl}\right] = -\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{67}$$

ただし

$$S_{ik} = F_{il}H_{kl} - \frac{1}{4}(F_{lm}H_{lm})\delta_{ik} \tag{68}$$

が成立する. テンソル $S_{\iota\kappa}$ の成分を (33) と (34) を用いて求めると, その空間部分は

$$S_{\iota\kappa} = -t_{\iota\kappa}$$

ただし

$$t_{\iota\kappa} = E_\iota D_\kappa + H_\iota B_\kappa - \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}.\boldsymbol{B})\delta_{\iota\kappa} \tag{69}$$

となる. ここに導入した $t_{\iota\kappa}$ は静止系では物体における Maxwell の応力テンソルに一致している. さらに

$$(S_{41}, S_{42}, S_{43}) = \frac{i}{c}\boldsymbol{S},$$

ただし

$$\boldsymbol{S} = c[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}] \tag{70}$$

は Poynting ベクトルになっている. S_{44} については

$$S_{44} = -h, \qquad h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}.\boldsymbol{B}) \tag{71}$$

がえられる. 静止系では $\boldsymbol{S}$ と h はそれぞれ定常運動をしている物体中の電磁エネルギー流と電磁エネルギー密度を表わす通常の表現形式に一致する.

最後に S_{14}, S_{24}, S_{34} は次のようになる.

$$(S_{14}, S_{24}, S_{34}) = ic\boldsymbol{g}$$

ただし

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}), \tag{72}$$

関係式 (67) の形から, (67) の左辺は電磁的な 4 元力の密度 f_i であり, (68) で定義された S_{ik} が電磁エネルギー運動量テンソルを表わしていることが暗示される. この結果は $\boldsymbol{S}$, h, $\boldsymbol{g}$ がそれぞれどの座標系においても電磁エネルギー流, 電磁エネルギー密度, 電磁運動量密度にあたるものとして取り扱うべきこ

とを意味している．S, h, g を上のように書き表わすことは Minkowski† にはじまる．$\epsilon=\mu=1$ の場合には，これらの表現はいずれも電子論におけるそれぞれの表現形式に帰一する．

いま物体は均質でかつ等方性をもつものとすれば，(67) の左辺の第2項が零となる．これは次の様にして容易に証明できる．いま静止系では (67) の左辺の第2項は (32) を用いれば次のようになる．

$$\frac{1}{4}\left[F^0_{kl}\frac{\partial H^0_{kl}}{\partial x^0_i}-\frac{\partial F^0_{kl}}{\partial x^0_i}H^0_{kl}\right]=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{B}^0\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}^0}{\partial x^0_i}-\boldsymbol{E}^0\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}^0}{\partial x^0_i}-\frac{\partial \boldsymbol{B}^0}{\partial x^0_i}\cdot\boldsymbol{H}^0+\frac{\partial \boldsymbol{E}^0}{\partial x^0_i}\cdot\boldsymbol{D}^0\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[|\boldsymbol{H}^0|^2\frac{\partial\mu}{\partial x^0_i}+|\boldsymbol{E}^0|^2\frac{\partial\epsilon}{\partial x^0_i}\right].$$

したがって ϵ と μ とが定数の場合にはこの項は S^0 系で零になる．一方あるベクトルのある座標系における成分がすべて零であれば，このベクトルはあらゆる座標系でも零である．すなわち証明されたことになる．この結果，均質で等方性をもつ物体の内部では

$$f_i=F_{il}J_l=\left(\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}),\ \frac{i}{c}(\boldsymbol{E}.\boldsymbol{J})\right) \tag{73}$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})=\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\right)+\frac{1}{c}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\\ f_4&=\frac{i}{c}(\boldsymbol{E}.\boldsymbol{J})=\frac{i}{c}\boldsymbol{E}(\rho\boldsymbol{u}+\boldsymbol{C})=\frac{i}{c}[\boldsymbol{f}.\boldsymbol{u}+\widetilde{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{C}]\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

がえられる．

f_4 を (74) のように表わすと，この f_4 は静止系では物体中の単位体積中に単位時間あたりに発熱する熱量を Joule 流に表わしたものと一致する．実さいに f^4_0 を求めてみると

$$f^0_4=\frac{i}{c}(\boldsymbol{E}^0.\boldsymbol{J}^0)=\frac{i}{c}(\boldsymbol{E}^0.\boldsymbol{C}^0)=\frac{i}{c}q^0. \tag{75}$$

$(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{u})$ はどんな座標系においても力学的な仕事を表わすので，f_i が4元力の密度の表現形式 (IV. 217) に合致するためには $q=(\widetilde{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{C})$ は発生する熱量を示す量でなければならない．4個の方程式

$$f_i=-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{76}$$

はふつうの運動量の法則およびエネルギーの法則を表わしている．

(73) から

$$f_iU_i=U_iF_{il}J_l=U^0_iF^0_{il}J^0_l=-(\boldsymbol{E}^0.\boldsymbol{J}^0)=-q^0 \tag{77}$$

† 194 頁の参考文献を見よ．

がえられる．したがって §50 で行なった考察によれば，ここでは物質の全固有質量の変化を起すような力の典型的な 1 例を扱っていることがわかる．

Minkowski の電磁エネルギー・運動量テンソルは，電子論の場合のテンソルと同じ恒等式

$$S_{ii}=F_{il}H_{il}-(F_{kl}H_{kl})\equiv 0 \tag{78}$$

を満足するが，対称ではない．すなわち

$$S_{ik}\neq S_{ki}. \tag{79}$$

静止系 S^0 では (69) の空間部分は (32) によって等方体の場合には対称となるが，時間空間の混合成分については静止系 S^0 でも

$$S^0_{\iota 4}-S^0_{4\iota}=ic\left(g^0_\iota-\frac{S^0_\iota}{c^2}\right)=i(\varepsilon\mu-1)(\boldsymbol{E}^0\times\boldsymbol{H}^0)_\iota\neq 0 \tag{80}$$

となって対称ではない．したがって等方性物体においても，S^0 以外の座標系ではどの座標系でも $S_{\iota\kappa}\neq S_{\kappa\iota}$ である．

上述の Minkowski のエネルギー・運動量テンソルの非対称性については長い間文献上†で議論が続けられたが，一般にこの非対称性に Minkowski の理論の真の難点が具体的に表われているという感があった．そこで Abraham‡ は対称性をもつ電磁エネルギー・運動量テンソルの表現形式を作ってみた．すなわち Abraham のテンソルは静止系 S^0 ではとにかく等方体の場合 (69), (70) および (71) と一致するように作られている．Abraham は電磁運動量の密度として (72) を用いないで，その代りに静止系で次の形をとる量

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2} \tag{81}$$

を電磁運動量の密度と仮定した．Abraham のテンソル S^{Abr}_{ik} は S^0 系では対称であるから，どんな座標 S においてもやはり対称であるが，S^0 系以外の他の座標系では S^{Abr}_{ik} の成分は (69), (70), (71), (81) のように簡単な形にはならないで，場を示す変数で表わした S^{Abr}_{ik} には物質の速度が $\boldsymbol{u}$ に非常に複雑な形ではいってくる．このテンソルから方程式

$$f^{\mathrm{Abr}}_i=-\frac{\partial S^{\mathrm{Abr}}_{ik}}{\partial x_k} \tag{82}$$

† M. Abraham, *Rand. Pal.* **28** (1909); *Ann. d. Phys.* **44**, 537 (1914); W. Dällenbach, op. cit (p. 194); M. von Laue, *Die Relativitätstheorie*, vol I, 3 rd ed., § 24, Braunschweig 1919; W. Pauli, *Encykl. d. Math, Wiss.* Vol. 2 (1920), p. 667; R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, § 54, Oxford, 1934; Jg. Tamm *Journ. of Phys*, USSR, **1**, 439 (1939)

‡ M. Abraham, *Rand. Pal.* **28** (1909); Abraham-Becker. *Theorie der Elektrizität*, vol. ii, 6th ed., Leipzig, 1933.

によって導かれた4元力の密度 f_i^{Abr} も一般には (73) からずれ，そのずれ方はきわめて複雑である．静止系においては

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{Abr}}=\boldsymbol{f}+\varepsilon\frac{\epsilon\mu-1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t},\qquad f_4^{\mathrm{Abr}}=f_4 \tag{83}$$

となることが直ちにわかり，Abraham の力の密度は Minkowski のそれよりも $\dfrac{\epsilon\mu-1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}$ だけ異なる．しかしこれはふつう非常に小さくて実験的は検証することはきわめて困難である．

きわめて最近まで，物理学者はほとんどすべて Abraham の理論を採用する方向に向いていたとはいえ，この問題は決して結論がついたわけではなく，最近 Tamm† はふたたびこの問題の論議をはじめ，エネルギー・運動量テンソルは Minkowski の表現形式の方が正しいという結論に達している．

ある物体の中の電磁場は本質的には閉じていない系であるため，エネルギー・運動量テンソルが対称であるべきであるという先験的な理由は1つもないということは先ず第一に注意しておくに値することである．Abraham がテンソルが対称であるべきことを主張した主な論拠は，巨視的な理論に現われる諸量はおのおのに対応する電子論に現われる諸量を適当な大きさの時空領域で平均してえられるべきものであり，微視的なエネルギー・運動量テンソル S_{ik} は対称であるから，それを平均してえられるテンソル $\bar{S}_{ik}$ は対称でなければならないということにあった．しかし Tamm‡ が注意したように巨視的なテンソル S_{ik} は単なる S_{ik} の平均ではなく，むしろ S_{ik} は力の密度および力のモーメントを正しく与えるように定義さるべきである．すなわち

$$f_i=-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}=-\frac{\partial \bar{s}_{ik}}{\partial x_k} \tag{84}$$

および (10) を用いた

$$d_{ik}=-\overline{x_i}\frac{\partial S_{kl}}{\partial x_l}+\overline{x_k}\frac{\partial S_{il}}{\partial x_l}+S_{ik}-S_{ki}=-\overline{x_i\frac{\partial s_{kl}}{\partial x_l}}+\overline{x_k\frac{\partial s_{il}}{\partial x_l}} \tag{85}$$

の成立を条件とすべきである．(84) より結論できることは，a_{ik} を

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}=0$$

をみたす非対称テンソルとしたとき S_{ik} は

$$S_{ik}=\bar{s}_{ik}+a_{ik}$$

と書かるべきであるということのみである．(85) を見れば

† Jg. Tamm, 203 頁の文献を見よ．

‡ Idem, 個人的な通信による．

$$\overline{-x_i\frac{\partial s_{kl}}{\partial x_l}}+\overline{x_k\frac{\partial s_{il}}{\partial x_l}}=-\overline{x_i}\frac{\partial \bar{s}_{kl}}{\partial x_l}+\overline{x_k}\frac{\partial \bar{s}_{il}}{\partial x_l} \tag{86}$$

が成立するときにかぎり，S_{ik} が対称であることがわかるが，この場合は必ずしも (86) が成立するわけではない．

さらにこれに加えて Tamm は，Minkowski のエネルギー・運動量テンソルの表現は電子論と一致するが，これに反して Abraham の表現はある特別な場合には間違った結果を導くことを示しえた．また Dällenbach† は全く強固な論拠の上に立ってというわけではないが，電子論から Minkowski のテンソルを一般的に導く方法をとにかく与えたということもここに述べるべきであろう．このように電磁エネルギー・運動量テンソルは非対称であるが，物質と場を合わせれば閉じた系になることから，物質と場の全エネルギー・運動量テンソルが対称であることは仮定できることである．しかしこうすると物質の力学的エネルギー・運動量テンソルもまた非対称であるべきだということになる．§6 では閉じた力学系について考察したのであるから，これと §65 の論議との間に矛盾があるわけではない．運動量の密度を表わしている (VI. 66) は $g=S/c^2$ という陽表的な仮定から導かれたが，われわれが電磁運動量の密度に Minkowski の表現を用いるとすれば (VI. 66) は廃棄しなくてはならぬ．

76. 屈折性物体中における光波のエネルギーの伝播速度

第 I 章および第 II 章で，われわれは透明な屈折性物体中における光線の方向や速度を Huyghens の原理によって定義した．そして §24 では，このようにして定義した光線速度が Lorentz 変換によって，粒子の速度と同じに変換されること，すなわち (II. 45-47) 式で変換されることを示した．これらの式からの結果として，§25 でわれわれは光行差の式 (II. 91) および Fresnel の式 (II. 92) に到達した．これらは 1 次の効果に関する限り実験に一致した．

Maxwell の光の理論によれば，屈折率 n なる屈折性物体中における光学現象は，n と

$$n=\sqrt{(\varepsilon\mu)} \tag{87}$$

なる関係で結ばれる誘電率 ϵ および導磁率 μ を有する物質に関する Maxwell の現象論的電磁力学の式で記述される，少くも波長が十分長い波の場合には，あらゆる分散現象が無視できるから，このことは正しい．さらに光を吸収しない透明体は完全な絶縁体でなければならない．すなわち，

---

† 194 頁の文献を見よ．

$$\sigma=0, \qquad \boldsymbol{J}=0, \qquad \rho=0 \tag{88}$$

である.

さて光線速度は，波のエネルギーの伝播する速度に等しくなければならない．例えば光行差の実験では，光行差の角は，その光線すなわちそのエネルギーを望遠鏡の中を通すために望遠鏡を傾けなければならない角である．したがって光線速度の方向は，波のエネルギーの伝播する方向と同じでなければならない．ところが，電磁場のエネルギー・運動量テンソルが与えられている場合は，エネルギーの速度は (VI. 9) すなわち

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{S}/h \tag{89}$$

で与えられる．したがって光波の場合，$\boldsymbol{u}^*$ が Lorentz 変換に対して粒子の速度と同じに変換されることを要求しなければならない．このことは (VI. 15) なる量が4元ベクトルでなければならぬことを意味する．§62 に示したようにこれが成り立つのは，そのエネルギー・運動量テンソル (VI. 19) がある条件を満足する場合に限る．そこで，われわれは，この条件は，Minkowski のテンソル (68)—(72) について実際に満足されているが，Abraham のテンソルについては満足されないことを示そう．このことが，Minkowski の理論を強く支持する点である．

§62 で述べたように (V. 19) が成り立つことをある1つの系について証明すれば十分である．そこで屈折性物質の静止系で議論することにしよう．われわれにとって平面波の場合を考えるだけで十分である．なぜならば，第I章および第 II 章で考えた問題では，波面の曲半径はその波長に比べて十分大きく（幾何光学の範囲）波面が曲面でも各々の場所では平面波で近似することができるからである．

附録3に示すように，$\rho=0$, $\boldsymbol{J}=0$ のときの場の方程式の解の中で，静止系における波動法線が $\boldsymbol{n}$ であるような平面波を表わす最も一般的な解は

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{f(t-(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{n})/w)}{\sqrt{\epsilon}}\boldsymbol{e}^{(1)}+\frac{g(t-(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{n})/w)}{\sqrt{\epsilon}}\boldsymbol{e}^{(2)}\\ \boldsymbol{H}&=-\frac{g(t-(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{n})/w)}{\sqrt{\mu}}\boldsymbol{e}^{(1)}+\frac{f(t-(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{n})/w)}{\sqrt{\mu}}\boldsymbol{e}^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

である.

ここで $\boldsymbol{e}^{(1)}$ と $\boldsymbol{e}^{(2)}$ は互に直交し，共に $\boldsymbol{n}$ に直交する単位ベクトルである．すなわち

$$(\boldsymbol{e}^{(1)}.\boldsymbol{e}^{(2)})=(\boldsymbol{e}^{(1)}.\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{e}^{(2)}.\boldsymbol{n})=0, \qquad (\boldsymbol{e}^{(1)}\times\boldsymbol{e}^{(2)})=\boldsymbol{n}, \tag{91}$$

f と g は変数 $t-(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{n})/w$ の任意の函数であり，

$$w=\frac{c}{\sqrt{(\varepsilon\mu)}}=\frac{c}{n} \tag{92}$$

は位相速度である．

このようにして，われわれはこの静止系で Minkowski の式

$$\boldsymbol{S}=c(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}(f^2+g^2)\boldsymbol{e} \tag{93}$$

をえる．ただしここで $\boldsymbol{e}$ は下式で定義される量である

$$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{n}. \tag{94}$$

すなわち，エネルギーの伝播方向 $\boldsymbol{e}$ は，この系では波動法線 $\boldsymbol{u}$ に一致する．さらに

$$h=\frac{1}{2}(\epsilon E^2+\mu H^2)=f^2+g^2 \tag{95}$$

であるから，したがって

$$\boldsymbol{u}^*=\frac{\boldsymbol{S}}{h}=\frac{c}{\sqrt{(\epsilon\mu)}}\boldsymbol{e}=u^*\boldsymbol{e}=\frac{c}{n}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{w}. \tag{96}$$

すなわち，この系では，エネルギーの速度は位相速度に等しい．(V. 15 および 12) により，(96) から

$$U_i^*=\left(\frac{c}{\sqrt{(\epsilon\mu-1)}}\boldsymbol{e},\quad \frac{ic\sqrt{(\varepsilon\mu)}}{\sqrt{(\varepsilon\mu-1)}}\right) \tag{97}$$

$$S_i=(\boldsymbol{S},ich)=(f^2+g^2)\left(\frac{c}{\sqrt{(\epsilon\mu)}}\boldsymbol{e},ic\right) \tag{98}$$

をえる．さらに (69) から

$$\begin{aligned}S_{\iota\kappa}&=-t_{\iota\kappa}=-\epsilon E_\iota E_\kappa-\mu H_\iota H_\kappa+\frac{1}{2}(\epsilon E^2+\mu H^2)\delta_{\iota\kappa}\\&=(f^2+g^2)(-e_\iota^{(1)}e_\kappa^{(2)}-e_\iota^{(2)}e_\kappa^{(2)}+\delta_{\iota\kappa})=(f^2+g^2)e_\iota e_\kappa\end{aligned} \tag{99}$$

をえる．ただし (91) により $e_\iota^{(1)}e_\kappa^{(1)}+e_\iota^{(2)}e_\kappa^{(2)}+e_\iota e_\kappa=\delta_{\iota\kappa}$ であることを用いた．最後に (72) から

$$S_{\iota4}=icg_\iota,\qquad g_\iota=\frac{\epsilon\mu}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_\iota=\frac{\sqrt{(\epsilon\mu)}}{c}(f^2+g^2)e_\iota \tag{100}$$

となる．

このときは，(97), (99), および (100) から，

$$a_\iota=\frac{S_{\iota l}U_l^*}{c^2}=\frac{1}{c^2}(S_{\iota\kappa}U_\kappa^*+icg_\iota U_4^*) \tag{101}$$

という量は，

$$a_\iota = -\frac{(f^2+g^2)}{c^2}\sqrt{(\epsilon\mu-1)}e_\iota \tag{102}$$

となる．したがって (VI. 19) で定義されるテンソル R_{ik} は次のような成分をもつことになる．

$$\left.\begin{aligned} R_{\iota\kappa} &\equiv S_{\iota\kappa}+a_\iota U^*_\kappa = (f^2+g^2)\left(e_\iota e_\kappa - \frac{\sqrt{(\epsilon\mu-1)}}{c}\frac{c}{\sqrt{(\epsilon\mu-1)}}e_\iota e_\kappa\right)=0 \\ R_{\iota 4} &\equiv icg_\iota + a_\iota U^*_4 = i(f^2+g^2)\left(\sqrt{(\varepsilon\mu)}-\sqrt{(\varepsilon\mu-1)}\frac{\sqrt{(\varepsilon\mu)}}{\sqrt{(\varepsilon\mu-1)}}\right)e_\iota = 0 \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

$R_{4k}\equiv 0.$

ゆえに (VI. 19) という条件は満足され，エネルギー伝播の速度 $\boldsymbol{u}^*$ は任意の座標系で，Huyghens の原理からきめた光線速度に一致する†.

静止系 S が S と同じ空間軸の向きをもった座標系 S' に対し速度 $\boldsymbol{v}'$ を有するとき (VI. 17′ または18) 式中の変換係数 $\epsilon_{\iota\kappa}$ は (IV. 126) で $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}'$ とおいたもの，すなわち

$$\epsilon_{\iota\kappa}=0, \qquad \varepsilon_{\iota 4}=-\epsilon_{4\iota}=\frac{-iv'_\iota}{c}, \qquad \epsilon_{44}=0 \tag{104}$$

である．S' 系でのエネルギーの速度は

$$u^{*\prime}_\iota = \frac{S'_\iota}{h'} = \frac{icS'_\iota}{S'_4} = \frac{icU^{*\prime}_\iota}{U^{*\prime}_4} \tag{105}$$

であるから，この量は (104) を用い (VI. 18 又は 17′) から計算することができる．したがって

$$\boldsymbol{u}^{*\prime} = \frac{c}{\sqrt{(\varepsilon\mu)}}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{v}'-\frac{(\boldsymbol{v}'.\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}}{\varepsilon\mu}, \tag{106}$$

となる．そして，これは (II. 55) で $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{u}=\{c/(\varepsilon\mu)\}\boldsymbol{e}$ とおき，v' の 2 次以上の項を無視したものに一致する．$\boldsymbol{u}^{*\prime}$ の大きさは

$$u^{*\prime} = \frac{c}{n}+(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{v}')\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \tag{107}$$

となり，これは ‘Fresnel の式’ (II. 92) に一致する．

これに反し，エネルギー・運動量テンソルとして，Abraham の式をとれば，(90)—(99) は静止系について成り立つが，(81) から (100) の代りに

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{Abr}} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} = \frac{1}{c\sqrt{(\varepsilon\mu)}}(f^2+g^2)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{g}-(\varepsilon\mu-1)\frac{\boldsymbol{S}}{c^2} \tag{108}$$

をえる．ゆえに (101) という量として，この場合

---

† A. Scheye, *Ann. d. Phys* (4), **30**, 805 (1909) を見よ．

$$a_\iota^{\mathrm{Abr}} = a_\iota - \frac{i}{c}(\varepsilon\mu - 1)\frac{S_\iota}{c^2}U_4^*$$

がえられ，したがって R_{ik} なるテンソルはもはや零にはならない．よって U_i^* は 4 元ベクトルにはならず，$\boldsymbol{u}^*$ は粒子の速度のように変換されない．

$\boldsymbol{u}^{*\prime}$ というベクトルを陽表的に知るため，もう一度 (104), (105) および (VI. 17′) を用いる．Abraham のエネルギー・運動量テンソルの式を用いると S' 系での電磁エネルギーの速度は，

$$\boldsymbol{u}^{*\prime} = \frac{c}{\sqrt{(\varepsilon\mu)}}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{v}' - \frac{(\boldsymbol{v}'.\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}}{\epsilon\mu} + (\boldsymbol{v}'.\boldsymbol{e})\left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)\boldsymbol{e}, \tag{109}$$

となり，最後の項だけ Huyghens の原理で定義された光線速度と異なる．また (107) の代りに

$$u^{*\prime}_{\cdot} = \frac{c}{n} + 2(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{v}')\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{109′}$$

となる．

(109) からわかるように，この場合エネルギーの流れの方向は Huyghens の原理から定義された光線速度の方向と異なる．そして，これが屈折率 $n>1$ の媒質を横切る光の光行差の式を変えてしまう．しかもその差は v' に関し 1 次である．残念ながら運動する透明媒質中における光行差は，その 1 次の効果すら測定が非常に困難である．

さらに，(109) によれば $\boldsymbol{v}'$ と $\boldsymbol{e}$ が平行な場合には，位相速度が光線速度に等しいのにもかかわらず，エネルギーの速度が位相速度と異なる．この奇妙な結果は次のような事情によるものである．

Minkowski の 4 元力の密度は，ここで考えている場合，零であるが，Abraham の理論では一様な絶縁体についても力の密度が零にならない．(83) によれば静止系では

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{Abr}} = \frac{\epsilon\mu - 1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = \frac{\epsilon\mu - 1}{c\sqrt{\epsilon\mu}}\frac{\partial}{\partial t}(f^2 + g^2)\boldsymbol{e}, \qquad f_4 = 0 \tag{110}$$

である．したがってこの系で電磁エネルギーは保有されるが，S' 系では保有されないことになる．(104) と変換式

$$f_i'^{\mathrm{Abr}} = f_i^{\mathrm{Abr}} + \epsilon_{ik} f_i^{\mathrm{Abr}}$$

から

$$f_4'^{\mathrm{Abr}} = \epsilon_{4\kappa} f_\kappa^{\mathrm{Abr}} = \frac{i}{c}\frac{\epsilon\mu - 1}{c^2}\left(\boldsymbol{v}' \cdot \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}\right) = \frac{i}{c}\frac{\epsilon\mu - 1}{c\sqrt{(\epsilon\mu)}}(\boldsymbol{v}'.\boldsymbol{e})\frac{\partial}{\partial t}(f^2 + g^2) \tag{111}$$

をえる．これは，単位時間にその物質の単位体積当り，物質になされる力学的

な仕事に $\dfrac{i}{c}$ をかけたものである．したがって S' 系では，電磁系と力学系の間にエネルギーのやりとり，すなわち，各場所毎に物体による光の吸収，再放出が起る．Minkowski の理論では透明体は，たとえ局所的にも電磁場とエネルギーのやりとりをしない系になっている．この点，全エネルギー・運動量テンソルを Minkowski のようにして電磁的部分と力学的部分とに分けるのが Abraham 流のやり方より自然であることが明らかである．

77. 定常運動をする物質における熱力学の法則

通常の熱力学の法則を特殊相対性理論に包含することは割合にやさしくできる．これについては Planck† と Einstein‡ の仕事がある．今は考察の対象をどんな面素にもそれに垂直な圧力のみを及ぼすような熱力学的な流体からなる系に限ることにする．この流体の静止系では熱力学の2つの法則の形式は通常のものと同じである．

第1法則によればこの系の全エネルギーは系の状態の1価函数になる．状態の変化を起させるような熱力学的な過程では，エネルギーの変化 dE^0 は

$$dE^0=\delta Q^0+\delta A^0 \tag{112}$$

で与えられる．ここで δQ_0 はこの過程において系に流入する熱量を表わし，δA^0 は系の周囲が系になした力学的仕事を表わしている．系の体積 V^0 の増加が無限小であるような過程は可逆過程であるが，この過程では p^0 を圧力とすれば，δA^0 は

$$\delta A^0=-p^0dV^0 \tag{113}$$

で与えられる．

熱力学の第2法則より，静止系におけるエントロピー S^0 は熱力学的状態の函数である．状態がわずかに変化したときの，ある系がもっているエントロピーの変化の定義は

$$dS^0=\frac{\delta Q^0_{\mathrm{rev}}}{T^0}=\frac{dE^0+p^0dV^0}{T^0} \tag{114}$$

で，$\delta Q^0_{\mathrm{rev}}$ はいま論じようとする状態変化をもたらす可逆過程で系に流入する熱量で，T^0 は系の絶対温度である．状態の変化が非可逆過程によって生じた場合には，これに反してつねに

---

† M. Planck, *Berl. Ber.*, p. 542 (1907); *Ann. d. Phys.* **76**, 1 (1908); F. Hasenöhrl. *Wien. Ber.* **116**, 1391 (1907).

‡ A. Einstein, *Jahrb. f. Rad. und El.* **4**, 411 (1907)

$$dS^0 > \frac{\delta Q^0}{T^0} \tag{115}$$

という不等式が成立する.

78. 熱力学的諸量の変換性

次に，熱力学に現われる諸量の変換に対する性質を明らかにすることにしよう．1つの慣性系を考え，これに対して，われわれが問題にする熱力学系が一定の速度 $\boldsymbol{u}$ で走っているものとする．考えている流体はその静止系で平衡状態にあるからそのエネルギー・運動量テンソルは (VI. 112, 113) で与えられ，これと (VI. 100) および (II. 34) から

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{G}=\frac{E^0+p^0V^0}{c^2\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\boldsymbol{u}, \qquad && E=\frac{E^0+p^0V^0u^2/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \\ &E+pV=\frac{E^0+p^0V^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, && p=p^0,\quad V=V^0\sqrt{(1-u^2/c^2)} \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

をえる.

さてふたたび，この系の状態を変える可逆過程を考える．熱力学の第1法則は任意の座標系で

$$dE=\delta Q+\delta A \tag{117}$$

と書けるであろう．ここで δQ と δA はそれぞれ，境界を通して流れるエネルギーの流れ，および，考えている過程の際に，まわりのものがその系に対してなす仕事である．ところが，この仕事は静止系の場合のように簡単に $-pdV$ に等しくはない．系の平衡を保つため，すなわち，速度が物体中到る処一定であるためには，普通の圧力のほかに外力の存在を仮定しなければならない．S 中で $\boldsymbol{u}$ を一定に保つのに必要な，その物体内での外力は全体で

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\frac{\boldsymbol{u}}{c^2\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\frac{d}{dt}(E^0+p^0V^0) \tag{118}$$

である．そして，右辺は，いま考えている熱力学的過程が行われている間は零でないから，物体に作用する外力がなければならぬ，そしてこれは，時間 dt に仕事 $(\boldsymbol{F}.\boldsymbol{u})dt=(\boldsymbol{u}.d\boldsymbol{G})$ だけ仕事をする．したがって，この系になされた仕事は全体で

$$\delta A=-pdV+\boldsymbol{u}.d\boldsymbol{G} \tag{119}$$

となる．$\boldsymbol{G}$ は (116) の第1式で与えられる．このように $\boldsymbol{u}$ が一定であるとき (117), (119) および (116) から

$$\delta Q=dE+pdV-\boldsymbol{u}.d\boldsymbol{G}$$

$$=\frac{dE^0+(u^2/c^2)d(p^0V^0)-(u^2/c^2)(dE^0+d(p^0V^0))}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}+p^0dV^0\sqrt{(1-u^2/c^2)}$$

$$=(dE^0+p^0dV^0)\sqrt{(1-u^2/c^2)} \tag{120}$$

をえる．ゆえに，(112) および (113) により

$$\delta Q=\delta Q^0\sqrt{(1-u^2/c^2)} \tag{121}$$

であることがわかる．

境界を通して伝達される熱量の変換式は物体内に発生する非力学的エネルギー，例えば Joule の熱効果の変換式 (IV. 66) に等しい．

さらに，任意の座標系におけるエントロピーと絶対温度を

$$dS=\frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} \tag{122}$$

で定義する．したがって，熱の授受を伴わない可逆過程に対しては，エントロピーは一定である．つぎに元来ある特定の座標系に静止している熱力学系の内部状態について考える．その内部状態を変えないようにして，系を可逆かつ断熱的に速度が $\boldsymbol{u}$ になるまで加速すれば，(122) により，この過程の間中，エントロピーは一定でなければならぬ．内部状態が一定なとき，この系のエントロピーは速度に無関係である．このことは，すべての座標系で，エントロピーが同じ値を有することを意味する (138 頁と同様な考察)．すなわち S は一つの不変量

$$S=S^0 \tag{123}$$

である．よって，(122), (121) および (123) から，温度の変換式

$$T=T^0\sqrt{(1-u^2/c^2)} \tag{124}$$

がえられる．

非可逆的な状態変化に対しては，すべての座標系で

$$\delta S>\frac{\delta Q}{T} \tag{125}$$

である．

79. 熱力学の法則の 4 次元的定式化

エネルギーと運動量の保存則を微分形式で表現したときは，それはテンソル方程式

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=f_i \tag{126}$$

で表わされる．このことについては §69 で述べた．この方程式の内容は熱力

学の第1法則であるが，熱力学の第2法則を 4 次元的形式で表現する†ことも第1法則と同様可能である．

エントロピーが加法性をもつことから，エントロピー密度 s が定義できる．すなわち微小体積 δV 中のエントロピーは $\delta S = s\delta V$ で与えることができる．エントロピー密度 s の変換公式は (123) と (116) の最後の式から直ちに求められ，次のようになる．

$$s = \frac{s^0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \tag{127}$$

無限小の時間 δt 内に微小体積 δV に流入した熱量を δQ とすれば，dt 内の δV 中のエントロピーの変化は (125) より次の関係式をみたす．

$$\frac{d}{dt}(s\delta V)\delta t \geq \frac{\delta Q}{T}. \tag{128}$$

ここで $d(s\delta V)/dt$ は δV を占める物体に着目した微分演算で，これは (IV. 200 と 204) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(s\delta V) &= \frac{ds}{dt}\delta V + s\frac{d}{dt}\delta V = \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})s + s\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)\delta V \\ &= \left(\mathrm{div}(s\boldsymbol{u}) + \frac{\partial s}{\partial t}\right)\delta V\end{aligned} \tag{129}$$

となる．

そこで，われわれは電荷の 4 元電流密度を導入した時と全く同様に (V. 3 を見よ) エントロピーの 4 元流の密度 S_i

$$S_i = \left(\frac{s\boldsymbol{u}}{c},\ is\right) \tag{130}$$

を導入することができる．またこの 4 元ベクトル S_i は (127) と (IV. 39) を用いて，(V. 9) と同じ形式

$$S_i = \frac{s^0 U_i}{c} \tag{131}$$

のようにも表わされる．

(129), (130) を用いれば (128) の左辺は

$$c\frac{\partial S_i}{\partial x_i}\delta V\delta t = \frac{\partial S_i}{\partial x_i}\delta\Sigma \tag{132}$$

の形になる．ただし $\delta\Sigma = \delta V\delta x_4/i$ は (IV. 121) によって定義された 4 次元的な体積素である．(121) と (124) より (128) の右辺は不変量となるから，熱力学の第2法則をは次のような簡単な，変換に対して不変な形式で表わされる．

† R. C. Tolman, *Relativity, thermodynamics and Cosmology*, § 71, Oxford 1934.

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_i}\delta\Sigma \geq \frac{\delta Q^0}{T^0} \tag{133}$$

80. 単原子理想気体

N個の分子からなる単原子気体については，分子の平均の運動エネルギーが分子の静止エネルギー m_0c^2 に比べて小さいような温度の場合，静止系でのエネルギー，エントロピー等に関する通例の式はわかっている．すなわち

$$\frac{kT^0}{m_0c^2} \ll 1 \tag{134}$$

ならば，静止系で，状態方程式は

$$p^0V^0 = NkT^0 \tag{135}$$

である．kは Boltzmann の定数である．また

$$E^0 = Nm_0c^2 + \frac{3}{2}NkT^0 \tag{136}$$

である．ここで，E^0 は温度零で分子の静止エネルギーの和になるように規格化してある．

(114), (135) および (136) から，普通の方法を用いて

$$dS^0 = \frac{3}{2}Nk\frac{dT^0}{T^0} + Nk\frac{dV^0}{V^0} \tag{137}$$

をえる．これを積分し

$$S^0 = \frac{3}{2}Nk\ln T^0 + Nk\ln V^0 + C \tag{138}$$

をえる．Cは T^0 や V^0 によらない定数である．

この気体が一定の巨視的速度 $\boldsymbol{u}$ をもつような座標系では，(116), (124) および (135) から

$$pV = NkT \tag{139}$$

をえる．すなわち理想気体の状態方程式は，形が不変である．さらに

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= \left(\frac{Nm_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} + \frac{\frac{5}{2}NkT}{c^2-u^2}\right)\boldsymbol{u} \\ E &= \frac{Nm_0c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} + \frac{NkT\left(\frac{3}{2}+u^2/c^2\right)}{1-u^2/c^2}, \\ S &= \frac{3}{2}Nk\ln T + Nk\ln V - \frac{5}{2}Nk\ln\sqrt{(1-u^2/c^2)} + C \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

となる．

エネルギー・運動量テンソルは，(VI. 104) により，

$$\left.\begin{aligned} T_{ik} &= \left(\mu^0+\frac{p^0}{c^2}\right)U_iU_k+p^0\delta_{ik}. \\ &\text{ただし,} \\ \mu^0 &= \frac{E^0}{c^2V^0}=n^0\left(m_0+\frac{3}{2}\frac{kT^0}{c^2}\right), \qquad p^0=n^0kT^0 \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

で与えられる．ここで $n^0=N/V$ は静止系での単位体積当りの分子数である．したがって，圧力 p^0，静止密度 μ^0，および温度 T^0 の間に次の関係をえる．

$$p^0=\frac{\mu^0kT^0}{m_0+\dfrac{3}{2}kT^0/c^2} \tag{142}$$

81. 黒 体 輻 射

空洞内に閉じこめられて，空洞の壁とある温度で平均状態にある電磁輻射は完全流体として取り扱うことができる．壁が静止している座標系では電磁輻射の流れはいたる所で零であり，エネルギー密度化は Stefan-Boltzmann の法則によって次の公式

$$h^0=aT^{0^4} \tag{143}$$

で与えられる．ただし

$$a=7.6237\times10^{-15}\text{erg. cm}^{-3}.\ \text{deg}^{-4} \tag{144}$$

は Stefan-Boltzmann の定数である．h^0 は空洞の体積にはよらない．また輻射は

$$p^0=\frac{a}{3}T^{0^4}=\frac{h^0}{3}=\frac{\mu^0c^2}{3} \tag{145}$$

で与えられる大きさ p^0 の圧力を面に垂直におよぼす．

輻射の全エネルギー E^0 は

$$E^0=aV^0T^{0^4} \tag{146}$$

となるので，(114) に (145), (146) を代入して

$$dS^0=4aV^0T^{0^2}dT^0+\frac{4}{3}aT^{0^3}dV^0 \tag{147}$$

がえられる．これを積分して，積分定数を $V^0=0$，$T^0=0$ で $S^0=0$ になるように選べば

$$S^0=\frac{4}{3}aV^0T^{0^3} \tag{148}$$

となる．

静止系が速度 $\boldsymbol{u}$ で運動している座標系では (116), (123), (124) を用いること

によって

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{G}&=\frac{4}{3}\frac{aV^0T^{0\,4}}{c^2\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\boldsymbol{u}=\frac{4}{3}\frac{aVT^4}{c^2(1-u^2/c^2)^3}\boldsymbol{u}=\frac{4}{3}\frac{E^0/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\boldsymbol{u}\\
E&=\frac{aV^0T^{0\,4}\left(1+\frac{1}{3}u^2/c^2\right)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}=\frac{aVT^4\left(1+\frac{1}{3}u^2/c^2\right)}{(1-u^2/c^2)^3}\\
&=E_0\frac{1+\frac{1}{3}u^2/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\\
S&=S^0=\frac{4}{3}\frac{aVT^3}{(1-u^2/c^2)^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(149)$$

が成立する．$\boldsymbol{G}, E, E^0$ および $\boldsymbol{u}$ の間の関係は，球対称である静電気系の場合と全く同じである ((23) と比較せよ).

黒体輻射のエネルギー・運動量テンソルは完全流体の場合と同じように

$$T_{ik}=\left(\mu^0+\frac{p^0}{c^2}\right)U_iU_k+p^0\delta_{ik}\qquad(150)$$

で与えられるが，この式中の圧力 p^0 と静止質量密度 μ_0 の間には (145) が成立している．また黒体輻射のエネルギー・運動量テンソルはどの電磁エネルギー・運動量テンソルについても成立する関係式

$$T_{ii}\equiv-\mu^0c^2+3p^0=0\qquad(151)$$

を満足する (V. 108 参照). このことは，黒体輻射の巨視的なエネギー・運動量テンソルが温度 T に対応するカノニック集合における電磁エネルギー・運動量の統計的平均値であることから当然予想されることである．

第 VIII 章
一般相対性理論の基礎

82. 一般相対性原理

特殊相対性理論の根底になっている特殊相対性原理によれば，恒星系に対して一定の速度で運動している変形することがない準拠系すなわち慣性系は，どれでも自然を記述する上では全く同等である．数学的にこの原理をいい表わせば，物理学の基礎方程式は Lorentz 変換に対して共変的であるということである．特殊相対性理論の特色は，この理論が全く内部的に矛盾を含まない調和のとれた論理構造をもっていることにあるが，それにもかかわらずこの理論は，それが慣性系という特別な準拠系をその他の考えられるあらゆる準拠系と区別しているという点でひじょうに不満足なものである．そしてこの欠陥は §20 で述べたいわゆる時計の背理を取り扱う場合に致命的なものに感ぜられた．現に §20 では時計の背理に対して真の解決を与えることを避けざるをえなかった次第である．すなわち時計と共に動いている座標系 S^* を慣性系としてよいのはほんのわずかの時間内だけであるから，このような座標系でこの問題を論ずることは，もはや特殊相対性理論の範囲を超えたことであるとして，この問題を却下したのである．

しかしながら，自然現象を記述する場合に加速系が慣性系と同等であるということをいきなり認めることはひじょうに無理であるように思われる（以後の各章でたんに加速系といっても，それは慣性系または恒星系に対して加速運動をしている系の意味で用いているのである）．たとえば数個の質点からなる純力学系で，これらの質点に作用する力がわかっており，またある慣性系内でのこれらの質点の速度がみな光速度にくらべて小さい場合には，この力学系を Newton 力学の基礎方程式で記述することはかなりよい近似になる．他方，同じ力学系をある加速系内で記述しようとすれば，よく知られているように，この力学系の物理的性質とは何の関係もない，いわゆる仮想的な力（遠心力，Coriolis 力など）を導入しなければならない．事実，仮想的な力は加速度の慣性系に対する加速度のみによってきまる．

Newton が絶対空間という概念の内容として自然法則が最も簡単で，しかも自然な形をとるような準拠系を導入したのは，正にこの理由によるものであっ

た．しかし第 II 章のはじめで述べたように，特殊相対性原理を全面的に受けいれてしまえば絶対空間という概念はその物理的意味を失なってしまう．それは，実験によってどの慣性系を絶対系とすべきかということをきめることはできないという結論がこの原理からえられるからである．そこで Einstein† は加速運動をしている準拠系に現われる仮想的な力に次のような新しい解釈を下すことを提唱した．すなわち，彼は仮想的な力の現われることが，等速度運動系と加速系とでは基礎方程式が原理的に違っていることを表わしているとは考えないで，基礎方程式の形は両種の準拠系で全く同じであるべきで，‘仮想的な’力も，自然界に存在する他の力と全く同格の実在する力として取り扱わるべきものと考えた．この新しい考え方によれば，加速運動をしている準拠系にこのような奇妙な力が現われる原因は，加速運動をしている準拠系においては恒星系という遠方の質量が加速されているという事実に求むべきであることになる．すなわち，この見方からすれば，ある準拠系において仮想的な力は重力の一種として取り扱うことができ，遠方の質量の加速度によって重力場が生ずると考えてよいことになる．

遠方にある質量が加速度をもっているとき，それが慣性系では感ぜられなかったような重力場を発生するという着想は，次に述べる事実と比較すればそれほど人為的なものとはいえない．その事実とは，電荷が静止しているような慣性系ではこの静電系は磁場を伴わないが，この電荷が一定の速度で運動しているような慣性系内では磁場が存在するということである．さて‘動いている’慣性系内に磁場が現われる原因は電荷がこの系に対して運動しているということに求むべきであって，磁場が現われるからといって，それを電磁気学の基礎方程式が慣性系ごとに違う形をとることの証拠であるなどとは考えてはならない．以上に対照した 2 つの場合の本質的な相違は，磁場の原因の方は地上の系(すなわち荷電系)の運動状態にあるのに対して，加速系における重力場の発生原因は遠方にある天体の運動状態にあるという事情のみである．従来は天体の質量の影響は無視してもよいものと考えてきたが，これからは遠方の質量をもわれわれの取り扱う物理系の一員に加えなければならない．ただ慣性系という特別な準拠系内で事象を取り扱う場合には遠方にある質量のことを考慮にいれる必要はない．実にこの事のみが慣性系を他の準拠系から区別する唯一の点なのである．**それにもかかわらず，物理学の基礎法則を定式化する場合，あらゆる準拠系は同等であると考えることができる**．この着想が**一般相対性原理**とよ

† A. Einstein, *Jahrb. f. Rad. und El.* **4**, 411 (1907); *Ann. d. Phys.* **35**, 898 (1911); ibld **38**, 355, 443 (1912); *Phys, Zs.* **14**, 1249 (1913)

ばれるものである．

83. 等価原理

‘仮想的な力’を重力と解釈することを決定的に支持するのは，この力がふつうの重力場と本質的に共通な性質をもっているという事実である．その共通な性質とは，これらの力はどんな自由粒子にもその質量の大きさには無関係に同じ加速度を与えるという性質である．‘仮想的な力’がこの性質をもっていることは自明のことである．また地球の重力場がこの性質をもっていることは Galileo によってはじめて実証された．彼は自分が行なった実験の結果として真空中では‘**あらゆる物体が同じ速さで落下する**’という命題に到達することができた．この結果は，地球の重力場の粒子におよぼす力が，その粒子が運動状態を変える際に示す慣性の大きさを決める質量に比例するということを端的に表わしている．したがって，粒子の速度が光の速度にくらべて小さい場合には，粒子の重力場の方向への運動は

$$m\ddot{x}=mg$$

という方程式で与えられる．ここで m は粒子の質量，$\ddot{x}$ は粒子の重力場の方向への加速度を表わす．g は重力場の強さを表わす量で粒子の質量には無関係である．この事情はしばしば次のような述べ方で表現されている．すなわち，**粒子の慣性質量と重力質量の比は1つの普遍定数で**，その値は関与している諸量の測定に用いられた単位のとり方によってのみきまる．この定理は現在まで多数の実験によって検証されているが†，中でも最も精密なものは Eötvös および Zeeman がそれぞれ行なった実験である．そして実験の結果はつねに慣性質量と重力質量の比が一定であることを示している．これらの実験の中で，Southerns と Zeeman の行なったウランについての実験は，次の事実がわかったことでとくに関心を惹くものである．ウランは当時としては質量欠損がもっとも大きい元素であった．第 III 章において大きさ E のエネルギーには慣性質量 $m=E/c^2$ が対応するという定理を導いた．この定理は数多くの核反応について実験的に検証されていることは §32 で述べた通りである．質量分析器で測られた質量が慣性質量であることは明らかである．Zeeman の実験の結果によれば，質量欠損という形で現われるウラン核の結合エネルギーにも重力

† R. V. Eötvös, *Math. u. naturw. Ber. aus Ungarn*, 8, 65 (1890); *Ann. d. Phys.* 59, 354 (1896); L. Southerns, *Proc. Roy. Soc. London*. A. 84, 325 (1910); P. Zeeman, *Proc. Amst.* 20, 542 (1917). R. V. Eötvös, D. Pekár and E. Fekete, *Ann. d. Phys.* 68, 11 (1922)

質量が対応しており，しかもこの重力質量と慣性質量の比も，他の型の質量の場合と全く同じ大きさの普遍定数であることがわかったのである．

以上論議した性質によってある重力場の特徴は測定に用いた粒子の質量には無関係な‘重力加速度’によって示すことができる．このことは地球や太陽の作る重力場のようなふつうの重力場の場合だけでなく，加速されている準拠系に現われる重力場，すなわち遠方にある恒星系の質量に由来する重力場の場合にも通用する．現に，自転している地球の表面における重力場はこの両者が混合したもので，地球の自転による遠心力は試験体が地球の質量によって引かれる力にくらべて一般には無視できない．したがってこの二つの型の重力場の本体は全く同じ基本法則に従うと仮定することはきわめて当然なことである．この仮定はしばしば**等価原理**とよばれている．遠方にある質量に由来する重力場は，準拠系として慣性系を選ぶというように準拠系を適当に選べば消去することができる．これに反して，地球や太陽のような‘近接している’質量に由来する重力場は適当に選んだ準拠系に移る‘変換によって消去する’ことができない．この意味で後の場を‘永久重力場’とよぶことにする．

このように消去できるる重力場とできない重力場の2つがあるということは納得できないかも知れないが，この点についても事情は §82 で重力場との比較にもち出した磁場の場合によく似ている．電磁場の源になっている電荷がすべて恒星系に対して同じ速度で等速度連動をしているという特別な場合には，これらの電荷の静止系を準拠系に選べば，この系に移る変換によって磁場を完全に消去することが可能である．しかしもっと一般の場合には，いたる所で磁場が消えているような準拠系を選び出すことは不可能になる．しかしそのために，この場合のような電磁場が，変換によって消去できるような電磁場と本質的に違っているとは考えられない．事実どんな場合にも，電磁場はすべて Maxwell の方程式という同一の基本法則にしたがっている．

そこでこの際，最も大切な課題となるのは，あらゆる型の重力場の従がうべき一般的な基礎法則をさぐり出すことであろうが，その前に第一になすべきことは重力場の記述に適した場の函数を見出すことである．このためには永久重力場が存在しないという簡単な場合について考えるべきである．この場合には慣性系という適当な準拠系を選べば，この系では重力場は消去され特殊相対性理論の諸法則が適用できる．そうしておいて簡単な加速系への変換を施せば加速系における重力場を記述する場の量をきめることができる．そしてこのようにしてきめられた場の量は，等価原理によってもっと一般的な永久重力場をも正しく記述することができるものと考えられるのである．

84. 一様に回転する座標系. 一般相対性理論における時間と空間

さて，一般相対性原理の基盤になっている考え方を発展させていくと，特殊相対性原理の場合よりももっと根本的に，われわれのもっている時間と空間という概念内容を変えなくてはならなくなる．このことをこれから述べよう．われわれが直面している問題の特質をはっきりさせるために，一様に回転する変形しない系という，ひじょうに簡単な加速座標系についての考察からはじめることにする．

すべての質量から十分離れていて重力の影響がすべて無視できるような場所に着目し，ここの慣性系の1つを I で表わす．そして§16, §17 で述べた方法で定義したふつうの時空座標を X, Y, Z, T で表わす．また物理空間内の1点を指定するのに直交座標の代りに一般曲線座標を用いてもよいことはいうまでもない．たとえば XY-面内の事象だけを取り扱うことにすれば

$$X=R\cos\theta,\qquad Y=R\sin\theta \tag{1}$$

という関係式で極座標 (R,θ) を導入することができる．

さて，一様に回転する座標系 S はこれに附随する空間座標を

$$x=r\cos\vartheta,\qquad y=r\sin\vartheta \tag{2}$$

とすれば，変換式

$$r=R,\qquad \vartheta=\theta-\omega T \tag{3}$$

によって定義される．(x,y) または (r,ϑ) が一定の点は回転系に固定している点であるが，これらの点はすべて慣性系 I に対して一定の角速度 ω で円運動をしていることは明らかである．$T=0$ では両系の座標は一致している．

したがって

$$r=R<c/\omega \tag{4}$$

をみたすすべての点に対しては，一様に回転している実際の物質で作った円板をこの回転座標系として用いてもよい．この円板上の各点 p は一組の数 (x,y) または (r,ϑ) で指定される．そして慣性系 I 内の時計が時刻 $T=0$ を指す瞬間に点 p と重なり合う XY- 面上の点の座標を (X,Y) または (R,θ) とすれば，(x,y) または (r,ϑ) はそれぞれこの (X,Y) または (R,θ) に等しい．

この回転する円板上の2定点間の距離を測るのに，慣性系で使った標準物指と同じものを使うことにするが，今度はこの標準尺は回転円板に対して静止していることを注意する．加速運動をしている準拠系で距離を測る手続きについては慣性系の場合には起らなかったような問題が生じてくる．さて，もし絶対に変形しない物体が存在するとすればこれを用いて c より大きい速さで信号を伝えることができるから，特殊相対性理論によって絶対に変形しない物体は存

在しえないはずである．このため物指を何らかの方法で回転する準拠系に固定しておく場合，この物指は力の作用を受けて一般には変形してしまう．

たとえば，回転する円板上の1点 (r, ϑ) に一端を固定して円板の半径方向に沿って置かれた物指を考えれば，この物指は明らかに遠心力によって引き伸ばされることになろう．しかしこのような変形は物質を構成する物質の弾性的な性質のために生ずるのであるから，この種の物指の狂いなら補正を施すことは容易である．そこでここに次のような仮定を設定することにする．すなわちこのような補正を行なった後の**円板に固定している物指の，慣性系 I での**ある時刻の**長さは，円板に固定されたこの物指と**その時刻に**同じ速度をもつ慣性系 I_0 内にある標準物指の長さと正確に同じである**と仮定する．さらに一般化して，**加速系内の（補正を施された）標準物指は慣性系 I 内の物指にくらべて Lorentz 変換を受けているだけが違っている．つまりこの物指の長さは，I に対する加速度には無関係である**と仮定することにする．

したがってこの円板上の標準物指で円板上の2点 (r, ϑ) と $(r+dr, \vartheta)$ の間の距離を測れば，I に対する物指の速度は物指に直交して Lorentz 短縮は起らないから，その値 $d\sigma$ は

$$d\sigma=dr; \tag{5}$$

となる．ところが次に円板上で座標が (r, ϑ) および $(r, \vartheta+d\vartheta)$ である2点を考えれば，この2点を結ぶ物指は I に対して物指の方向に $r\omega$ の速度をもっているから I 系の物指にくらべて Lorentz の変換式 (II. 33) による短縮を受ける．このため，この縮んだ物指で測った2点間の距離 $d\sigma$ は，

$$d\sigma=\frac{r d\vartheta}{\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}} \tag{6}$$

となることになる．

最後に，この円板上の物指で2つの近接点 (r, ϑ) と $(r+dr, \vartheta+d\vartheta)$ の間の距離を測った値 $d\sigma$ は同様に

$$d\sigma^2=dr^2+\frac{r^2d\vartheta^2}{1-r^2\omega^2/c^2}. \tag{7}$$

この結果は，この測定の過程を慣性系 I から眺め，回転する円板に固定した物指が I 系の物指にくらべて速度の方向には縮むが速度に垂直な方向には縮まないのを考慮すれば Pythagoras の定理より直ちにえられる式である．

さてこのように円板に対して静止している標準物指で測った結果を用いてえられる幾何学の諸定理が Euclid 幾何学の諸定理と一般にはくいちがってくることは直ちにわかることである．たとえば

$$r=\text{一定}$$

で与えられる曲線は (5) から半径 r の円を表わしている．ところがその円周の長さは (6) から

$$\int_0^{2\pi}\frac{r\,d\vartheta}{\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}}=\frac{2\pi r}{\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}} \tag{8}$$

となる．この結果，円周と半径の比は 2π にはならずに

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}}>2\pi$$

となる．

したがって加速系が自然を記述する上で慣性系と全く同等であるという一般相対性原理を認めることになれば，とくに Kant が空間を記述する際の不可欠の基礎であると主張し，特殊相対性理論においてすらそのことは正しかった Euclid 幾何学も場合によっては捨てざるをえないことになるのである．そのためにまた，加速運動をしている準拠系では物理空間の点を指定するのに一般に直交座標系を用いることができなくて一般曲線座標を用いなければならないという結果になってしまうのである (§87 参照).

同様に，一般相対性原理は時間の概念に対して新たな変革を要求するのである．特殊相対性理論では，慣性系内の時間は，系内の各点に標準時計を置き，これらを §16 で述べたように光の信号を用いて合わせることによって簡単に定義することができた．そしてこの方法で同じ速さで時を刻むように調整された 2 つの時計はいつまでたっても同じ速さで時を刻むのである．回転座標系における時間も全く同様に，この系の各点に標準時計を固定させておき，慣性系 I 内の時計がたとえば零を刻む瞬間にちょうどこの時計と重なっている回転座標系の時計を零に合わせることにして定義したらどうかということが考えられる．そうすれば $T=0$ のときこのように定義した回転系の時刻も零である．ところが円板上の 1 点 r, ϑ に置かれた標準時計は I に対して速度 $r\omega$ をもっているから，I に置いた時計にくらべて (II. 36) 式で示されるだけ遅れることになる．すなわち $T=0$ 以後の時刻においては

$$t=T/\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)} \tag{9}$$

ということになる．この場合にも，§20 における仮定と同様に，標準時計の進み方には I に対する速度だけが影響をおよぼし，加速度は影響しないことを予想している．実際の場合には加速度が十分大きければ加速度が多少とも現実の時計の進み方に影響を与えることはいうまでもない（たとえば床に落された時計のことを考えてみよ）．しかし時計の構成物質に依存するような効果は物指

の場合のように補正を施すことができる.

(9) で定義されている時間変数 t を用いて回転系の時間を記述することはたしかに原理的には許されているが，それはきわめて非実用的である．たとえば座標が (r, ϑ) である点 A に光源 (原子) が置かれていて，これが固有振動数 ν_0 の光を放射しているとする．この場合，$t=0$ から $t=1$ までの間に放出される波の数は定義によって ν_0 に等しい．したがって $T=0$ から $T=1$ までの間に放出される波の数は (9) によって $\nu_0(1-r^2\omega^2/c^2)^{1/2}$ となる．したがって円板の中心 0 $(r=0)$ には $T=0$ から $T=1$ までの間にこれと同じ数の波が到達することになる．ところが中心では $r=0$ であるために $t=T$ となり，$t=0$ から $t=1$ の間にもやはり同じ数 $\nu_0(1-r^2\omega^2/c_2)^{1/2}$ の波が到達することになる.

このように t のスケールでは，単位時間に点 A から放射される波の数は，単位時間に中心 O に到達する波の数より多いことになる．そして，この時間変数を用いたのでは，光の伝播の記述が非常に複雑なことになってしまう．このような考察からわかるように，加速系の場合には，標準時計を使って定義する時間変数を用いるのは不便であって，むしろ進み方のちがう時計を用いる方が記述がもっと簡単になるかも知れないのである．例えば，回転する円板の場合，標準時計よりも $(1-r^2\omega^2/c^2)^{-1/2}$ 倍速く進む**座標時計**を用いるのが最も便利である．なぜなれば，この座標時計で定義される時間のパラメーターは，I 系の時間 T に一致するからである．すなわち，この場合には (9) の代りに

$$t=T \tag{10}$$

となる.

とはいえ，物理的な事象に合理的な時間的順序づけを与える限り，どんな進み方の座標時計を用いることも原理的には許されるのである．したがって加速系では，時間座標や空間座標は，それぞれの物理的な意味を失ってしまい，勝手ではあるが不定性のない方法で，物理的事象につけられた単なる番号に過ぎないのである.

85. 非 Euclid 幾何学．計量テンソル

前節で述べたように，回転する円板上の空間幾何学は，非 Euclid 的である．3 次元の物理空間内におけるあらゆる幾何学的な経験は Euclid 幾何学の諸定理と完全に一致したものであるけれども，2 次元の場合には非 Euclid 幾何学の概念も，われわれにとって決して見知らぬものではない．というのはあらゆる曲面上でそのような幾何学の実例に遭遇するからである．よく知られているその 1 例は，球面上における球面幾何学である．したがって，n 次元空間の非

Euclid 幾何学への手引きとして，3次元 Euclid 空間内に含まれている任意の2次元的な曲面上の幾何学について考えることにしよう．x, y, z をこの空間内における直交座標とすれば，問題の曲面はパラメター表示

$$x=F(x^1, x^2), \qquad y=G(x^1, x^2), \qquad z=H(x^1, x^2), \tag{11}$$

で与えられる．ここで F, G, H は，ある区間内を変動する2つのパラメター x^1, x^2 の，与えられた函数である．(11) を微分することにより

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{\partial F}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial F}{\partial x^2}dx^2 \\ dy&=\frac{\partial G}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial G}{\partial x^2}dx^2 \\ dz&=\frac{\partial H}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial H}{\partial x^2}dx^2 \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

がえられる．パラメターの値がそれぞれ (x^1, x^2) と (x^1+dx^1, x^2+dx^2) であるような，この表面上の相隣る2点間の距離 ds は

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

で与えられる．ただしこの dx, dy, dz は (11′) で与えられる dx^1, dx^2 の1次式である．(11′) を用いて ds^2 を dx^1 と dx^2 に関する斉2次形式；

$$ds^2=g_{11}(dx^1)^2+g_{12}(dx^1dx^2)+g_{21}(dx^2dx^1)+g_{22}(dx^2)^2, \tag{12}$$

として表わすことができる．

ただし

$$\left.\begin{aligned} g_{11}&=\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial x^1}\right)^2 \\ g_{12}=g_{21}&=\frac{\partial F}{\partial x^1}\frac{\partial F}{\partial x^2}+\frac{\partial G}{\partial x^1}\frac{\partial G}{\partial x^2}+\frac{\partial H}{\partial x^1}\frac{\partial H}{\partial x^2} \\ g_{22}&=\left(\frac{\partial F}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial x^2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

である．

パラメター (x^1, x^2) の2組の増分 $(\delta x^i)=(\delta x^1, \delta x^2)$ および $(\varDelta x^i)=(\varDelta x^1, \varDelta x^2)$ に対応する2つの線素の間の角 θ は

$$\cos\theta=\frac{\delta x\varDelta x+\delta y\varDelta y+\delta z\varDelta z}{\delta s\varDelta s} \tag{13}$$

で与えられる．ここで $(\delta x, \delta y, \delta z)$ と $(\varDelta x, \varDelta y, \varDelta z)$ は，(11′) で，$(dx^i)=(dx^1, dx^2)$ を (δx^i) および $(\varDelta x^i)$ とおきかえてえられる x, y, z の増分を表わし，δs と $\varDelta s$ はこれらの線素の長さを表わす．(11′), (12) および (12′) を用いれば，この式は

$$\cos\theta = \frac{g_{11}\delta x^1 \Delta x^1 + g_{12}\delta x^1 \Delta x^2 + g_{21}\delta x^2 \Delta x^1 + g_{22}\delta x^2 \Delta x^2}{\delta s \Delta s} \tag{14}$$

という形に書くことができる．

2つの線素 $(\delta x^i)=(\delta x^1, \delta x^2)$ と $(\Delta x^i)=(\Delta x^1, \Delta x^2)$ はこの曲面上で，面積が

$$d\sigma = \delta s \Delta s \sin\theta, \tag{14'}$$

の無限小平行四辺形を定義する．ここで θ は (14) で与えられるものである．

(11) でそれぞれ

$$x^1 = 一定, \tag{15 a}$$

$$x^2 = 一定 \tag{15 b}$$

とおいてえられる曲面上の2曲線を座標曲線と云う． 線素 (δx^i) と (Δx^i) が，それぞれこの2つの座標曲線の上にあるときは

$$(\delta x^i)=(dx^1, 0) \quad および \quad (\Delta x^i)=(0, dx^2)$$

である．そして (12) と (14) から

$$\delta s = (g_{11})^{1/2} dx^1, \qquad \Delta s = (g_{22})^{1/2} dx^2$$

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{(g_{11}g_{22})^{1/2}}, \qquad \sin\theta = (1-\cos^2\theta)^{1/2} = (g/g_{11}g_{22})^{1/2}$$

がえられる．ここで

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = |g_{ik}| \tag{16}$$

は g_{ik} の行列式である．したがってこの平行四辺形の面積は (14′) から

$$d\sigma = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \tag{17}$$

となる．

曲面のパラメター表示 (11) が，そのパラメターの値 $x^i=(x^1, x^2)$ の各々の組に対して，この曲面上の点が唯一つ対応するような性質のものであるときは，$x^i=(x^1, x^2)$ を，この2次元曲面上における1組の一般曲線座標 (Gauss 座標) とすることができる．そのとき，あらゆる基本的な幾何学上の諸量は，この曲面を含んでいる3次元空間の変数を用いずに，この曲線座標だけで表わすことができる． $g_{ik}=g_{ik}(x^i)$ が与えられた座標 (x^i) の函数であるときは， 線素は (12) により

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{18}$$

で表わされる．この式で，i, k はそのとりうる値 1, 2 について加え合わせるものとする．

2つの線素 (δx^i) と (Δx^i) の間の角 θ は (14) により

$$\cos\theta = \frac{g_{ik}\delta x^i \Delta x^k}{\sqrt{(g_{ik}\delta x^i \delta x^k)}\sqrt{(g_{ik}\Delta x^i \Delta x^k)}} \tag{19}$$

で与えられ，座標曲線方向の 2 つの線素で定義される平行四辺形の面積は (17) で与えられる．このように，g_{ik} なる量——いわゆる**計量テンソル**の成分——は曲面上の幾何学を決定する．そしてこの幾何学は一般には非 Euclid 幾何学になるのである．

86. 測　地　線

Euclid 幾何学では直線を最短距離の曲線として定義することができるが，もっと一般の場合にも，同様に 1 つの変分原理で定義される測地線がその代役を演ずる．2 次元の曲面上に，2 定点 P_1, P_2 を結ぶ任意の曲線を考える．この曲線のパラメター表示では，Gauss 座標 $x^i=(x^1, x^2)$ は任意のパラメター λ の，区間

$$\lambda_1<\lambda<\lambda_2$$

における函数と考えられる．すなわち

$$x^i=x^i(\lambda) \qquad (i=1,2) \tag{20}$$

である．

$L=L(x^i, \dot{x}^i)$ を変数

$$x^i \quad \text{および} \quad \dot{x}^i=dx^i/d\lambda$$

に関する与えられた函数とする．2 定点 P_1 と P_2 を結ぶ曲線のどんな無限小変形に対しても，積分

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x^i,\ \dot{x}^i)d\lambda$$

が停留値をとるような曲線 (20) は，境界条件

$$\delta x^i(\lambda_1)=\delta x^i(\lambda_2)=0 \tag{21}$$

を満足するあらゆる変分 $\delta x^i(\lambda)$ に対して

$$\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x^i, \dot{x}^i)d\lambda=0 \tag{22}$$

であるという条件によって定まる．

さて

$$\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Ld\lambda=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i(\lambda)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}^i(\lambda)\right\}d\lambda, \tag{23}$$

であり，$\delta\dot{x}^i=d(\delta x^i)/d\lambda$ であるから，境界条件 (22) を考慮して (23) の右辺第 2 項に部分積分を行えば，

$$\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Ld\lambda=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\delta x^i(\lambda)d\lambda$$

がえられる．この積分が考えられるあらゆる変分 $\delta x^i(\lambda)$ に対して，零になり

うるのは，角型の括弧で囲まれた δx^i の係数が曲線上到る処で零になる場合だけである．したがって，変分原理 (21), (22) は **Euler の微分方程式**

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^i}=0, \qquad \dot{x}^i=\frac{dx^i}{d\lambda} \tag{24}$$

と同等である．

Lが変数 $\dot{x}^i$ についてn次の斉次函数である場合には，

$$\dot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}=nL \tag{25}$$

であるから，$n\neq1$ なるとき，$L(x^i, \dot{x}^i)$ は微分方程式 (24) で定義される曲線上到る処で一定値をとらなければならない．何となれば，(24) と (25) から

$$\frac{dL}{d\lambda}=\frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\dot{x}^i$$
$$+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}^i}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i\right)=n\frac{\partial L}{\partial \lambda}, \tag{26}$$

したがって

$$(n-1)\frac{dL}{d\lambda}=0 \tag{27}$$

となり，$n\neq1$ なる限り

$$L(x^i, \dot{x}^i)=\text{一定} \tag{28}$$

が (24) 式の積分となるからである．

さて，変分原理 (21) において L を

$$L(x^i, \dot{x}^i)$$
$$=g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}=\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 \tag{29}$$

とおいたもので，測地線を定義することにしよう．これに対する Euler の方程式 (24) は，

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{d\lambda}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda} \tag{30}$$

となる．これは2つの函数 $x^i(\lambda)$ に対する2つの2階微分方程式である．(29) のLは $\dot{x}^i$ に関する2次の斉次函数であるから，

$$L=g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}=\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2=\text{一定} \tag{31}$$

が (30) の解である．そしてパラメーターλを適当に選んで (31) の右辺の定数がちょょど1になるようにすることができる．これはパラメーターλとして測地線の長さSそのものを選ぶことに他ならない．そのとき，(30) と (31) は

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{ds}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}, \qquad g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=1 \tag{32}$$

という形になる.

以上のことから直ちに, (30) と (31) で定義される曲線が,

$$L=\left(g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}\right)^{1/2}$$

に対する Euler の方程式 (24) をも満足することがわかる. これはまた, 測地線が変分原理

$$\delta\int\left(g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}\right)^{1/2}d\lambda=\delta\int ds=0 \tag{33}$$

を満足すること, すなわち測地線に沿って測った 2 点間の距離は, 停留値をとることを意味する.

さて計量テンソル g_{ik} が一般座標 (x^i) の函数として与えられていれば, 測地線自身や, 相交わる 2 つの測地線間の角, 測地線に沿って測った 2 点間の距離は (32), (19) および (18) により完全に定まる. さらに, この曲面上で測地線で囲まれた三角形に関する幾何学の定理を演繹することができるなど, この 2 次元空間の幾何学は $g_{ik}(x^i)$ なる量によって完全に定義されるのである.

87. 直接測定によって計量テンソルを決定すること. n-次元空間の幾何学

今までの演繹は, 云うまでもなく, 用いた座標系のいかんには無関係である. もとの座標 x^i と変換

$$x'^i=f^i(x^1, x^2) \tag{34}$$

によって結ばれている他の曲線座標 x'^i を用いても,

$$dx'^i=\frac{\partial f^i}{\partial x^k}dx^k, \tag{35}$$

で, 座標の微分は線型関係で結ばれているから, (35) を用いて (18) 中の dx^i を消去しても, ds^2 はやはり dx'^i に関して 2 次の斉次式

$$ds^2=g_{ik}dx^idx^k=g'_{ik}dx'^idx'^k, \tag{36}$$

になる. ここで g'_{ik} は新しい座標 x'^i の函数であると見なすことができる.

測地線は不変な変分原理 (21), (29) で定義されているから, 新しい座標で表わされた測地線の微分方程式も, (30) または (32) で g_{ik} と x^i をそれぞれ g'_{ik}, x'^i でおきかえたものになること, 言いかえれば, (30) 式は共変的であること, すなわち形が不変であることは明らかである. (19) についても同様なことが成り立つ.

(34) のような型の変換で座標 $X^i=f^i(x^k)$ を導入し, この新しい座標でかいた線素が

$$ds^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2=\delta_{ik}dX^idX^k, \tag{37}$$

の形をとるようにすることができる場合，この曲面上の幾何学は Euclid 的であるという．この場合座標 X^i は，Euclid 幾何で，平面上の直交座標が果した役割と同じ役割を果す．この座標では，測地線の微分方程式 (32) は

$$\frac{d^2X^i}{ds^2}=0 \tag{38}$$

となる．これは直交座標系における直線の方程式と同じ型をしている．このような曲面の実例は，円筒や円錐である．これらは，内部的な変形を与えることなく，平面に展開することができる．このような曲面上における三角形その他の図形に関する幾何学上の定理はすべて Euclid 幾何学の定理と同じであり，曲面上の2次元の幾何学に関する限り，これらの曲面はすべて同等であると見なすことができるのである．

曲面上に線素が (37) のような形をとるような座標 (直交座標) を導入することは一般には可能でない．そのような場合には，曲面上の幾何学は，非 Euclid 的な一般 Riemann 幾何学になる．しかし，いずれにしても，曲面上の幾何学は，その曲面が含まれている3次元 Euclid 空間から眺めてみなくても，曲面上での測定だけによって，決定することができるのである．任意の座標 x^i，すなわち曲面上の各点と連続的に一対一の対応をする数の組 (x^i) を導入したとする．物指を使って，われわれは点 x^i と x^i+dx^i の間の距離 ds を測定することができる．ds と dx^i は既知の数であるから，(18) 式を未知数 g_{ik} を決めるのに使うことができる．2次元の計量テンソルは，3つの独立成分を有するから——同一点 x^i を一端とする適当な3つの線素についてこの操作を行うことにより——この点における g_{ik} の値を完全に決めることができる．これは，曲面上の任意の点について行うことができるから，このようにして，計量テンソルを完全に実験的に決めることができる．

こうして，曲面上の幾何学も，測定の精度に限りがあることによって制限を受ける経験的な科学になってしまうのである．例えば曲面上の与えられた1点の近くが加熱されていて物指をこの点にもっていった場合これも膨脹する場合を考えよう．このような膨脹が起っていることを無視してしまうならば，上に述べた方法で測った計量テンソルの成分の値は正しい値ではない．しかしこのような熱膨脹は物指が作られている物質によって異るから，この誤差を修正して真の計量テンソルの成分の値を見出すのは容易である．ところが，なんらかの理由で，与えられた点の附近ですべての物指が，物指の材料物質のちがいには無関係な，一様な変形をうけるような場合には，この変形を観測することも，任意性なしにこれを修正することもできない．したがって標準尺にこのよ

うな膨脹が起ったと云っても，それははっきり定義された意味をもたないのである．そして物理学者の立場から云えば，自然物を標準尺に用いて測定した計量テンソルや幾何学こそ，この曲面上の‘真の’幾何学でなければならないのである．

2 次元の場合について行った本節の考察はすべて，そのまま 3, 4 または n 次元空間の場合に一般化することができる．唯ちがう点と云えば，n 次元空間では点が n 個の座標 x^i で指定されることで，以前に導いた式の指標がすべて 1 から n までの値をとりうることだけである．この場合にも線素の長さや 2 本の線素の間の角はそれぞれ (18) と (19) で与えられ，測地線は n 個の方程式 (30) または (21), (22), (29) で表わされる変分原理で定義されるのである．

88. 一般の加速系．許しうる最も一般的な時間・空間の変換

§84 で述べたように，一様に廻転している系内での空間幾何学は，非 Euclid 的であり，時間的な記述も，慣性系内の場合より遙かに複雑であった．これは廻転系内に存在する重力場の仕業と見なさなければならない．したがって等価原理によれば，重力場の影響は単に，重力（遠心力，Coriolis の力，質量間の万有引力等）が存在するということだけでなく，時間空間の測定にもその影響が現われてくる．

もう一度慣性系 I から出発して考察を進めよう，I での普通の時空座標を (X, Y, Z, T) とする．これらの変数の値の各組にある事象が対応し，これらの事象は座標が

$$x^i=(X, Y, Z, cT) \tag{39}$$

なる (3+1)-空間の 1 点として表わすことができる．これらの座標は，第 4 成分で i を省いている点で，(IV. 2) で定義したものと異なる．したがって 4 次元の線素 (IV. 26) は

$$ds^2=dX^2+dY^2+dZ^2-c^2dT^2=G_{ik}dX^idX^k, \tag{40}$$

という形をとる．ただし

$$G_{ik}=\begin{cases}0 & (i\neq k)\\ 1 & (i=k=1,2,3)\\ -1 & (i=k=4)\end{cases} \tag{41}$$

である．

擬直交座標 X^i の代りに

$$x^i=x^i(X^k) \tag{42}$$

なる変換により，4 次元空間の一般“曲線”座標 x^i を導入しよう．ただし

$x^i(X^k)$ は，X^k の任意の連続かつ微分可能な函数であるとする．(42) を微分して

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial X^k}dX^k=A^i_k dX^k \tag{43}$$

がえられる．

同様にして (42) の逆関係式から，

$$dX^i=\frac{\partial X^i}{\partial x^k}dx^k=\breve{A}^i_k dx^k \tag{44}$$

がえられる．(43) の右辺に (44) を代入すれば

$$dx^i=A^i_l\breve{A}^l_k dx^k$$

となる．この式は任意の dx^i について成立するから

$$A^i_l\breve{A}^l_k=\delta^i_k=\begin{cases}0 & (i\neq k)\\ 1 & (i=k)\end{cases} \tag{45}$$

でなければならない．同様に (44) に (43) を代入して

$$\breve{A}^i_l A^l_k=\delta^i_k \tag{45'}$$

がえられる．(40) から，dX^i を消去すれば

$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k \tag{46}$$

が成立する．ただし

$$g_{ik}=g_{ki}=G_{lm}\breve{A}^l_i\breve{A}^m_k=\breve{A}^\iota_i\breve{A}^\iota_k-\breve{A}^4_i\breve{A}^4_k \tag{47}$$

である（ギリシャ文字の指標は 1 から 3 までの値，ローマ字の指標は 1 から 4 までの値をとるものとする)．

変換 (42) で決められる座標系 (x^i) は，一つの準拠系を定めることになる．3つの空間座標 (x^ι) が定まった値を有する点を‘準拠点’と云うことにすれば，座標系 (x^i) に対応する準拠系は，あらゆる準拠点の集合であるとして定義することができる．このような準拠系は一般には，もちろん変形しうる．なぜならば，個々の準拠点は，各々 I に対して非常にちがった速度をもっていてもよいからである．したがって準拠系中の各点の運動は一般に流体の運動によく似ている．そこで，変換 (42) としては，それによって定義される準拠系が実在の流体で表わされるようなものだけに限ることにしよう．すなわち，慣性系 I に対して各準拠点の速度が常に c よりも小さくなければならないという制限を置くことにする．各準拠点については $dx^\iota=0$ であるから，I に対するこのような点の速度成分 v^ι については，(44) から

$$\frac{v^\iota}{c}=\frac{dX^\iota}{dX^4}=\frac{\breve{A}^\iota_4}{\breve{A}^4_4} \tag{48}$$

がえられる．この速度が c より小であるためには，

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{v^\iota v^\iota}{c^2}<1,\quad あるいは\quad \breve{A}^\iota_4\breve{A}^\iota_4-\breve{A}^4_4\breve{A}^4_4<0 \tag{49}$$

でなければならない．(42) で定義される準拠系を実際に作り上げることが物理的にいって可能であるためには，時空変換として許されるものは (49) という条件を満足しなければならないことになる．(47) によれば，この条件はまた

$$g_{44}<0 \tag{50}$$

であることを意味する．

各準拠点にそれぞれ時刻 $t=\dfrac{x^4}{c}$ を指し示すような**座標**時計が置かれているものと考えよう．そして更にこのようにして時間を記述することが，物理現象を因果的に記述するのに合理的なものでなければならないことを要求しなければならない．時刻 t に準拠点 (x^ι) から放射された実在の信号は dt を正として，時刻 $(t+dt)$ に準拠点 $(x^\iota+dx^\iota)$ に到着しなければならない．信号は I に対して速度がたかだか c であるから，信号の世界線上の相隣る 2 点を結ぶ線素

$$ds^2=dX^\iota dX^\iota-c^2dT^2$$

は零またはそれより小でなければならない．このことは，座標系 x^i で

$$ds^2=g_{ik}dx^idx^k\leqq 0$$

であるべきことを意味する．

換言すれば，座標系 (x^i) で同時，すなわち $dx^4=0$ であるような任意の 2 事象を信号で連絡することはできない．この場合には

$$g_{ik}dx^idx^k>0,$$

あるいは，$dx^4=0$ であるから，

$$g_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa>0 \tag{51}$$

でなければならない．この不等式は dx^ι の任意の値について成立しなければならない．これは 2 次型式 $g_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa$ が**正値定号**なるべきことを意味する．そのための必要かつ十分な条件は，$g_{\iota\kappa}$ のあらゆる小行列式が正であることである．つまり

$$g_{\iota\iota}>0,\quad \begin{vmatrix} g_{\iota\iota} & g_{\iota\kappa} \\ g_{\kappa\iota} & g_{\kappa\kappa} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}>0,\quad g_{44}<0, \tag{52}$$

ここで ι および κ はそれぞれ 1, 2, 3 のうちの任意の 1 つを表わす（この場合 $g_{\iota\iota}$ は ι について加え合わせない）．

(52) から

$$g=|g_{ik}|=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}<0 \tag{53}$$

であることがわかる．

座標系 x'^i を，変換式

$$\left.\begin{aligned} &x'^i=x'^i(x^k)\\ &dx'^i=\alpha^i_k dx^k=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k\\ &dx^i=\breve{\alpha}^i_k dx'^k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}dx'^k \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

によって導入すれば，(45), (45′) と同様に，

$$\alpha^i_l\breve{\alpha}^l_k=\breve{\alpha}^i_l\alpha^l_k=\delta^i_k \tag{55}$$

がえられる．

線素を新しい座標で表わせば，ふたたび斉2次形式

$$ds^2=g_{ik}dx^idx^k=g'_{ik}dx'^idx'^k \tag{56}$$

がえられる．ここで

$$g'_{ik}=g'_{ki}=g_{lm}\breve{\alpha}^l_i\breve{\alpha}^m_k \tag{57}$$

は新しい座標 x'^i の函数である．(57) の逆関係は

$$g_{ik}=g'_{lm}\alpha^l_i\alpha^m_k \tag{58}$$

である．このことは (57) を (58) の右辺に代入し，(55) を用いて確めることができる．変換式 (54) は，新しい函数 g'_{ik} が (52) という形の不等式を満足するような性質のものでなければならない．

座標系 (x'^i) で定義される準拠系 R' は，一般に，座標系 (x^i) に対応する準拠系 R とは異なる．しかし，変換 (54) が

$$\left.\begin{aligned} &x'^\iota=x'^\iota(x^\kappa)\\ &x'^4=x'^4(x^i)=f(x^i) \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

なる形の場合，すなわち空間座標 x'^ι が空間座標 x^κ のみの函数である場合には，準拠系 R' と R は同一のものである．なぜならば，この場合には，変換は単に，準拠点の番号をつけ変えると共に座標時計の合せ方や進み方を連続的に変えるだけのことを意味するにすぎないからである．座標系 (x^i) には各々唯1つの準拠系が対応するけれども，準拠系が与えられた場合には，その中に (59) のような型の変換で互に結ばれる無限に多くの相異なる座標系を導入すること

ができる．特殊な変換 (59) に対してはその係数 α^i_k と $\breve{\alpha}^i_k$ が

$$\alpha^\iota_4 = \breve{\alpha}^\iota_4 = 0 \tag{59'}$$

なる条件をみたすことは明らかである．

一般に座標系が異なれば，重力場も異なる．しかし，(59) で結ばれているような座標系では物理的な理由で，重力場が同じであると考えるのが便利である．なぜならば，これらの座標系はみな同じ準拠系に対応しているからである．しかし，準拠系が変れば，一般に重力場も変るであろう．この意味から云って，慣性系というものは例外的である．その理由は慣性系内ではすべて重力が零であるからである．

89. 任意の準拠系における空間と時間の測定．函数 g_{ik} を実験的に決めること

任意の準拠系 R を考え，それにある座標系 (x^i) を導入することにしよう．この系内に特に空間座標がそれぞれ (x^ι) および $(x^\iota + dx^\iota)$ であるような 2 つの準拠点を A, B とする．さて時刻 $t = x^4/c$ における A と B の間の空間的な距離 $d\sigma$ を，AB 2 点を結び，A に対して静止している標準尺で測ることができる．dx^ι が非常に小さい場合の極限では，B も標準尺に対して事実上静止していることになる．$d\sigma$ を函数 g_{ik} の函数として表わすため，時刻 t に準拠点 A (および近似的に B も) が静止しているような慣性系 I^0 を導入する．I^0 中の擬直交時空座標を X^i で表わせば，I^0 から S への変換は (42)—(48) 式で与えられる．ところが，いま考えている時刻で I^0 は点 A の静止系であるから，(48) により，時刻 t, 点 A において

$$\breve{A}^\iota_4 = 0 \tag{60}$$

である．測定の時刻における点 A および B の直交座標の同時的な値の差 dX^ι は (44) で，

$$i = \iota, \qquad dx^4 = dt = 0$$

とおいてえられる．したがって

$$dX^\iota = \breve{A}^\iota_\kappa dx^\kappa, \tag{61}$$

である．ところが $dx^4 \neq 0$ なる場合でも，(44) の $\breve{A}^\iota_4 dx^4$ なる項はやはり零になる．このことは I^0 に対して同時であるような A, B の位置については dX^ι の値が近似的に一定であることを意味する．

222 頁で定式化した一般的な仮定によれば，R 系中の標準物指は，I^0 中の標準物指と同じ長さを有する．したがって $d\sigma^2$ は簡単に

$$d\sigma^2=\sum_{\iota=1}^{3}(dX^{\iota})^2.$$

となる．dX^{ι} に式 (61) を用いれば $d\sigma^2$ は微分 (dx^{ι}) に関して2次形式

$$d\sigma^2=\gamma_{\iota\kappa}dx^{\iota}dx^{\kappa} \tag{62}$$

となる．ただし $\gamma_{\iota\kappa}=\breve{A}^{\lambda}_{\iota}\breve{A}^{\lambda}_{\kappa}$ である．さて (47) と (60) から

$$g_{i4}=\breve{A}^{\iota}_{i}\breve{A}^{\iota}_{4}-\breve{A}^{4}_{i}\breve{A}^{4}_{4}=-\breve{A}^{4}_{i}\breve{A}^{4}_{4}$$

がえられる．したがって

$$\breve{A}^{4}_{\iota}=-\frac{g_{\iota 4}}{\breve{A}^{4}_{4}}=-\frac{g_{\iota 4}}{\sqrt{(-g_{44})}}=-\gamma_{\iota}$$

となる．ここで

$$\gamma_{\iota}\equiv\frac{g_{\iota 4}}{\sqrt{(-g_{44})}} \tag{63}$$

とおいた．さらに (47) で $i=\iota$, $k=\kappa$ とおけば

$$\breve{A}^{\lambda}_{\iota}\breve{A}^{\lambda}_{\kappa}=g_{\iota\kappa}+\breve{A}^{4}_{\iota}\breve{A}^{4}_{\kappa}.$$

これから，計量テンソルの空間部分を表わす式

$$\gamma_{\iota\kappa}=g_{\iota\kappa}+\gamma_{\iota}\gamma_{\kappa} \tag{64}$$

がえられる．このように，準拠系Rにおける空間の幾何学を決める計量テンソル $\gamma_{\iota\kappa}$ は，一般に，4次元計量テンソル g_{ik} の空間部分 $g_{\iota\kappa}$ にそのまま等しくはない．等しくなるのは，

$$g_{\iota 4}=0 \quad \text{あるいは} \quad \gamma_{\iota}=0 \tag{65}$$

なる場合だけである．

4元空間の各点で(65) が満足されるような座標系では，時間軸は到るところ，空間座標曲線に直交する．そこでこのような系は**時間に直交する**と云う．

さて，準拠系R内の与えられた準拠点Aに静止する標準時計Cを考える．そのときは，この時計の世界線は

$$ds^2=g_{44}(dx^4)^2 \tag{66}$$

で与えられる．なぜならば静止している時計については $dx^{\iota}=0$ だからである．$t=x^4/c$ はAにある座標時計の示す時間であるが，時計Cの時間の増分 $d\tau^0$ は

$$ds^2=-c^2d\tau_0^2$$

で与えられる (§37 参照)．このことは，時計 C に対してその瞬間静止する慣性系 I^0 を導入してみれば，ds^2 の不変性から直ちに明らかなことである．すなわち ds^2 をこの系での時空座標 (dX^{0i}) で表わせば，$dX^{0i}=0$ であるから，

$$ds^2=-c^2(dT^0)^2$$

となり，さらに時間 T_0 自身は，I^0 中に静止してい標準時計の示す時間であるから，$dT^0=d\tau_0$ となるからである．よって (66) は

$$d\tau_0^2=-g_{44}dt^2 \tag{66'}$$

と書ける．したがって函数 $\sqrt{(-g)}$ は，標準時計 C の進む速さと，考えている場所における座標時計の進む速さの比を定めるものである．このように g_{44} なる量は，これらの両時計の進み方の比を測定することによって実験的に決定することができる．これを準拠点ごとにあらゆる時刻について実行すれば $g_{44}(x^i)$ が時空座標 (x^i) の函数として求まることになる．

(62) によって，S における空間の幾何学を決定する計量テンソル $\gamma_{\iota\kappa}$ も，§ 87 において 2 次元の場合の例で説明したのと同じ方法で直接測定によって決めることができる．$\gamma_{\iota\kappa}$ の 6 つの独立成分を決定するには，各点，各時刻ごとに適当に選んだ 6 つの線素 (dx^ι) の長さを測定するだけでよい．

さて，γ_ι なる量を測定することができるような手段が見出せるなら，それで計量テンソル g_{ik} が完全に決定されることになる．そのため，座標 (x^ι) なる点を時刻 t に出発し，これに近接する点，例えば座標が $(x^\iota+dx^\iota)$ なる点 B に時刻 $t+dt$ に到達する光の信号について考えよう．この信号の世界線は

$$ds^2=g_{ik}dx^idx^k=0 \tag{67}$$

で特徴づけられる．何となれば，慣性系 I では信号の速度は c だからである．このことは不変量 ds^2 が，

$$ds^2=G_{ik}dX^idX^k=dX^2+dY^2+dZ^2-c^2dT^2=0$$

であることを意味する．(67) 式はまた

$$g_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa+2g_{\iota4}dx^\iota dx^4+g_{44}(dx^4)^2=0,$$

あるいは (63), (64) および (62) により

$$d\sigma^2-(\gamma_\iota dx^\iota)(\gamma_\kappa dx^\kappa)+2\sqrt{(-g_{44})}\gamma_\iota dx^\iota dx^4+g_{44}(dx^4)^2=0$$

と書くことができる．この式を dt^2 で割れば

$$w^2=\{\gamma_\iota w^\iota-c\sqrt{(-g_{44})}\}^2 \tag{68}$$

となる．ここで

$$w^\iota=\frac{dx^\iota}{dt}=wn^\iota \tag{69}$$

は光の信号の速度の n^ι 方向の成分であり，

$$w=\frac{d\sigma}{dt}=\sqrt{(\gamma_{\iota\kappa}w^\iota w^\kappa)} \tag{69'}$$

はこの速度の大いさである．(68) から先ずわかることは，考えている座標で $\gamma_\iota\neq0$ ならば，光速度 w が信号の伝播方向 n^ι によって異なることである．こ

れを示そう．実際，(68) に (69) を代入してみれば，

$$w(n^{\iota})=\frac{c\sqrt{(-g_{44})}}{\gamma_{\iota}n^{\iota}+1} \tag{70}$$

がえられる．ただしここで

$$\gamma_{\iota\kappa}n^{\iota}n^{\kappa}=1 \quad \text{すなわち} \quad (\gamma_{\iota}n^{\iota})^2<1$$

が成立している．

逆に，方程式 (70) を $(\gamma_{\iota}n^{\iota})$ について解けば，3つの n^{ι} の方向について光の速度を測ることにより3つの量 γ_{ι} を決定することができる．このようにして，$\gamma_{\iota\kappa}$, γ_{ι}, g_{44} の全部，すなわち，計量テンソル g_{ik} の全部の成分を実験によって決定することが原理的に可能である．

90. 回転系における空間幾何学

§84 で導入した回転座標系についてもう一度考えることにすれば，変換式 (42) にあたるものは (1), (3) および (10) からえられる．ここではむしろその逆変換を求めるとそれは次の形になる．

$$\left.\begin{aligned} &X=r\cos(\vartheta+\omega t), \qquad Y=r\sin(\vartheta+\omega t) \\ &Z=z, \qquad T=t \\ &x^i=(r,\vartheta,z,ct) \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

これを微分し，(dX, dY, dZ, dT) を求めて，これを線素の式

$$ds^2=dX^2+dY^2+dZ^2-c^2dT^2$$

に代入すれば

$$\begin{aligned} ds^2&=dr^2+r^2d\vartheta^2+dz^2+2\omega r^2d\vartheta dt-(c^2-r^2\omega^2)dt^2 \\ &=g_{ik}dx^idx^k \end{aligned} \tag{72}$$

となり，g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}, $g_{24}=g_{42}$ として，次の値をえ，

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=1,\quad g_{44}=-\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) \\ &g_{24}=g_{42}=\frac{\omega r^2}{c} \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

その他の g_{ik} の成分はすべて零であることを知る．ゆえに (63) と (64) から，

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{\iota}=\left(0,\frac{\omega r^2}{\sqrt{(c^2-r^2\omega^2)}},0\right)=\frac{\omega r^2}{\sqrt{(c^2-r^2\omega^2)}}\delta_{\iota 2} \\ &\gamma_{11}=1,\qquad \gamma_{22}=\frac{r^2}{1-r^2\omega^2/c^2},\qquad \gamma_{33}=1 \\ &\gamma_{\iota\kappa}=0,\quad (\iota\neq\kappa) \end{aligned}\right\}, \tag{74}$$

このようにして，もし (62) と (74) から空間線素 $d\sigma^2$ を計算するならば，(7)

がふたたびえられる．さらに，g_{44} の式 (73) を用いれば (66′) は (9) 式になる．

この線素 $d\sigma^2=\gamma_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa$ で定義される空間幾何学は非 Euclid 的である．$z=Z=0$ なる平面上，すなわち，回転する円板上では座標は $(x^1, x^2)=(r, \vartheta)$ の 2 つになり，その測地線は (32) 式

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\gamma_{\iota\kappa}\frac{dx^\kappa}{d\sigma}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{\kappa\lambda}}{\partial x^\iota}\frac{dx^\kappa}{d\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}\qquad(\iota=1,2)\tag{75 a}$$

$$\gamma_{\iota\kappa}\frac{dx^\iota}{d\sigma}\frac{dx^\kappa}{d\sigma}=1\tag{75 b}$$

から定まる．これらは，回転円板上に静止する物指で測った距離が最短であるような曲線を定義する．この場合 (75 *a*) の右辺および (74) から

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{r^2}{1-r^2\omega^2/c^2}\frac{d\vartheta}{d\sigma}\right)=0$$

がえられる．そうしてこれを積分すれば

$$\frac{r^2}{1-r^2\omega^2/c^2}\dot{\vartheta}=\alpha\tag{76 a}$$

となる．ただし，α は定数で $\dot{\vartheta}$ は $d\vartheta/d\sigma$ を表わす．したがって

$$\dot{\vartheta}=\alpha\left(\frac{1-r^2\omega^2/c^2}{r^2}\right)\tag{76 a′}$$

となる．さらに，(75 *b*) から

$$\dot{r}^2+\frac{r^2}{1-r^2\omega^2/c^2}\dot{\vartheta}^2=1,\qquad \dot{r}=\pm\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2\omega^2}{c^2}-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)}.\tag{76 b}$$

したがって

$$\frac{dr}{d\vartheta}=\frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}}=\pm\frac{r^2\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2\omega^2}{c^2}-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)}}{\alpha\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)}\tag{77}$$

が成立し，これを積分すれば，r を ϑ の函数として与えた測地線の式がえられる．

α が零のときは，(76 *a′*) から $\dot{\vartheta}=0$，すなわち，$\vartheta=$一定 なる動径が測地線であることが解る．第 17 図は，回転する円板上の測地線の 2，3 の例を Euclid 平面上の図として表わしたものである．この図においては，円板上の座標 (r, ϑ) の点を極座標 (r, ϑ) の点として図示している．この図の曲線は，時刻 $t=T=0$ に回転する円板上の測地線上の

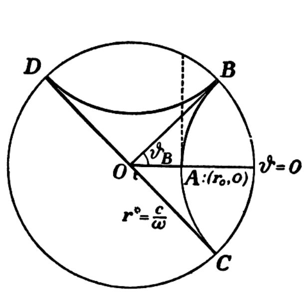


FIG. 17

第 17 図

各点と一致するような，固定された XY 面上の曲線を示したものである．この円板の半径 r^* は (4)，すなわち

$$r^*=c/\omega \tag{78}$$

で定義される．

測地線 OB と OA については，$\alpha=0$ である．点 $(r_0, 0)$ から出発し，その点では OA に直交する，すなわち $\dot{r}=0$ であるような測地線 AB の場合には，$\alpha\neq 0$ で，(76 a'), (76 b) からわかるように，

$$\alpha=\frac{r_0^2}{(1-r_0^2\omega^2/c^2)}\dot{\vartheta}_0=\frac{r_0}{\sqrt{(1-r_0^2\omega^2/c^2)}} \tag{79}$$

である．ϑ の値が増すにつれて，動径 r は，(77) で与えられる速さで増大する．そしてその速さ $\dfrac{dr}{d\vartheta}$ は $c\to\infty$ の極限の場合の

$$\frac{dr}{d\vartheta}=\frac{r(r^2-\alpha^2)^{1/2}}{\alpha} \tag{80}$$

よりも大きいことがわかる．第 17 図で破線で示した直線は (80) からきまる直線で，回転円板上の幾何学が Euclid 的であるとしたときの測地線に他ならない．r が $r^*=c/\omega$ に近づくと，(76 a') からわかるように $\dot{\vartheta}\to 0$ となる．このことは，点 B で OB が測地線 AB の接線であることを示している．

同一の点を通る 2 つの測地線 $x_1^i=x_1^i(\sigma_1)$, $x_2^i=x_2^i(\sigma_2)$ について考えよう．交点における両曲線のなす角 θ は (19) から求まる．(74) と (76) からこれは

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\gamma_{ik}dx_1^i dx_2^k}{d\sigma_1 d\sigma_2}=\dot{r}_1\dot{r}_2+\frac{r^2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2}{1-r^2\omega^2/c^2}\\&=\pm\sqrt{\left(1+\frac{\alpha_1^2\omega^2}{c^2}-\frac{\alpha_1^2}{r^2}\right)}\sqrt{\left(1+\frac{\alpha_2^2\omega^2}{c^2}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}\right)}+\frac{\alpha_1\alpha_2(1-r^2\omega^2/c^2)}{r^2}\end{aligned} \tag{81}$$

となる．ここで α_1, α_2 は考えている両測地線に対する定数 α の値である．この式は点 O 以外ではどこでも用いることができる．

さて三角形 OAB について考えよう．点 O ではこの三角形の 2 辺のなす角は $\theta_O=\vartheta_B<\dfrac{1}{2}\pi$ である．なぜならば円板の中心では幾何学は Euclid 的だからである．測地線 AO と AB が A においてなす角は，(81) で

$$\alpha_1=0, \qquad \alpha_2=\alpha=\frac{r_0}{\sqrt{(1-r_0^2\omega^2/c^2)}}$$

とおいてみればわかるように

$$\cos\theta_A=-\sqrt{\left\{1+\alpha^2\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)\right\}}=0,$$

すなわち

$$\theta_A=\frac{\pi}{2}$$

である．最後に (81) で $\alpha_1=0,\ \alpha_2=-\alpha,\ r=r^*=c/\omega$ とおけば測地線 BA と BO の間の角 θ_B がわかる．すなわち

$$\cos\theta_B=\sqrt{\left\{1+\alpha^2\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\right\}}=1,\quad \theta_B=0$$

である．ゆえに三角形 OAB の内角の和は

$$\theta_{OAB}=\theta_O+\theta_A+\theta_B=\vartheta_B+\frac{\pi}{2}<\pi$$

となる．すなわち回転円板上の三角形では内角の和は π より小さい．三角形が中心の近くになる場合に限り，内角の和は近似に Euclid 幾何の場合の π に等しくなる．回転円板上には内角の和が零になるような三角形すら存在する．例えば，$\vartheta_B=\dfrac{\pi}{4}$ ならば，測地線 $CB,\ BD,\ DC$ の作る三角形 CBD の内角和は零，すなわち

$$\theta_{CBD}=0$$

である．このように回転円板上の三角形の内角の和は 0 と π の間のどのような値にもなりうる．回転円板上の観測者によって作られるような空間幾何学は，3 次元 Euclid 空間内にある負の曲率を有する曲面上の幾何学と同じである．

回転系では，場合によっては，円筒座標 (r,θ,z) と次のような関係にある，別の空間座標 (x,y,z) を用いるのが便利である．

$$x=r\cos\vartheta,\qquad y=r\sin\vartheta,\qquad r^2=x^2+y^2. \tag{82}$$

この座標では，線素 (72) は

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+2\omega(-ydx+xdy)dt-\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)c^2dt^2 \tag{83}$$

となる．

91. 自由粒子と光線の世界線

加速系で，その重力の影響だけを受けながら自由に運動する質点について考えよう．この系での座標を (x^i) とする．この重力場は永久的な重力場でないから，§88 で出発点とした慣性系 I の擬直交座標系 (X^i) を導入すればこの系に移ることによって重力場は簡単に消去されてしまう．この系での自由粒子の運動は一様である．そしてその世界線は

$$\frac{d^2X^i}{d\lambda^2}=0 \tag{84}$$

で定義される直線である．ここで λ は任意のパラメターである．換言すれば，

自由落下をする粒子の世界線は，4元空間では一つの測地線である．この測地線は変分原理 (21), (29), (33) によって定義される．ただし今度は指標 i, k は，1から4までの値をとる．固有時 $\tau=s/ic$ をパラメターとして導入すれば，変分原理 (33) は，変分

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau=\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{1}{c}\sqrt{\left(-g_{ik}\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_k}{d\tau}\right)}d\tau$$
$$=\frac{1}{c^2}\int\left[\frac{d}{d\tau}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{d\tau}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\right]\delta x^i d\tau \tag{85}$$

が $\tau=\tau_1$ と $\tau=\tau_2$ で零になるようなすべての変分 δx^i に対して零になるべきことを示している．これから Euler の方程式 (32)，すなわち

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{d\tau}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau},\quad g_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}=-c^2 \tag{86}$$

がえられる．

擬 Euclid 座標系では，計量テンソル G_{ik} は，(41) で定義されるものである．その場合には，(86) は (84) になってしまい，(85) は §59 で用いた式 (V. 102) に転化する．

次に，真空中における光線について考えることにしよう．慣性系 I では，その世界線は (84) で与えられるが，今度は $ds^2=G_{ik}dx^i dx^k=0$ という制限がつけ加わる．したがって，光線の世界線は長さが零であるような測地線である．だから，その長さをパラメターとして用いることができない．任意の座標系 (x^i) では，(30) と (31) で定数を零に置いたもの，すなわち

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{d\lambda}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda},\quad g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}=0 \tag{87}$$

をえる．ただし

$$x^i=x^i(\lambda)$$

はこの世界線のあるパラメーター表現である．

92. 力学的重力ポテンシャル

§89 と §90 で，われわれは任意の加速座標系 (x^i) 内で，その重力場が標準物指や標準時計を用いて行う時間および空間の測定に影響をおよぼすことを知った．そして例えばその空間幾何学は (64) で定義される空間の計量テンソル γ_{ik} によって定まる．今度は，この重力場の力学的な働きを記述する量を決定することにしよう．そのため，任意の質量をもった試験体を用い，これを重力場を測ろうとするこの座標系の1点に静止させておく．そのとき重力場のためにこの粒子が受ける加速度は場の強さによってきまる．

ある瞬間静止している粒子について，(86) で $i=\iota=1, 2, 3$ とおけば，

$$g_{\iota\kappa}\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2}+\frac{d}{d\tau}\left(g_{\iota 4}\frac{dx^4}{d\tau}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\iota}\left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^2 \tag{88}$$

がえられる．また勝手な運動をしている粒子に対しては，(64), (63), (62) から

$$\begin{aligned}-c^2d\tau^2=ds^2&=g_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa+2g_{\iota 4}dx^\iota dx^4+g_{44}(dx_4)^2\\&=\gamma_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa+\frac{(g_{\iota 4}dx^\iota+g_{44}dx^4)^2}{g_{44}}\\&=d\sigma^2+g_{44}(dx^4)^2\left(1-\frac{\gamma_\iota}{\sqrt{(-g_{44})}}\frac{u^\iota}{c}\right)^2\end{aligned} \tag{89}$$

がえられる．ここで τ はその固有時，

$$u^\iota=\frac{dx^\iota}{dt}=c\frac{dx^\iota}{dx^4}$$

はこの粒子の速度の成分である．

(89) を $(dx^4)^2$ で割り，それを $\dfrac{dx^4}{d\tau}$ について解けば

$$\frac{dx^4}{d\tau}=c\left\{(-g_{44})\left(1-\frac{\gamma_\iota u^\iota}{c\sqrt{(-g_{44})}}\right)^2-u^2/c^2\right\}^{-1/2} \tag{90}$$

となる．ただし，$u=\dfrac{d\sigma}{d\tau}$ はこの粒子の速度の大きさを表わす．

したがって

$$g_{\iota 4}\frac{dx^4}{d\tau}=c\gamma_\iota\left\{\left(1-\frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c\sqrt{(-g_{44})}}\right)^2+\frac{u^2}{c^2}g_{44}\right\}^{-1/2}$$

であり，瞬間的に静止している粒子に対しては，計算の結果

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\iota 4}\frac{dx^4}{d\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{(-g_{44})}}\left[c^2\frac{\partial\gamma_\iota}{\partial x^4}+\frac{\gamma_\iota\gamma_\kappa}{\sqrt{(-g_{44})}}\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}\right.$$

および

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2}=\frac{1}{-g_{44}}\frac{d^2x^\kappa}{dt^2} \tag{91}$$

が成立する．

よって，(91) と (90) を (88) に代入して，

$$\gamma_{\iota\kappa}\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial x^\iota}\left(-\frac{c^2g_{44}}{2}\right)-c\sqrt{(-g_{44})}\frac{\partial\gamma_\iota}{\partial t} \tag{92}$$

がえられる．左辺は重力場が試験体に与える加速度

$$a_\iota=\gamma_{\iota\kappa}\frac{d^2x^\kappa}{dt^2} \tag{93}$$

をわれわれの準拠系の曲線座標での共変成分で表わしたものである（§100 参照）．したがって，この重力場の力学的な働きは，函数 g_{44} と γ_i によって記述される．

そこで

$$g_{44}=-\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right) \tag{94}$$

とおけば (92) から，

$$a_i=-\frac{\partial\chi}{\partial x^i}-c\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t} \tag{95}$$

なる式がえられる．

この式と荷電粒子に作用する電気力をポテンシャルで表わした式とを比べてみればわかるように，χ および γ_i なる量はそれぞれ重力場のスカラー・ポテンシャルおよびベクトル・ポテンシャルと呼ばるべきものである．スカラー・ポテンシャル χ は，重力ポテンシャルが零のときに g_{44} が特殊相対論の場合の値 -1 になるように規格されている．

γ_i が時間に依存しないときは，重力加速度は簡単にスカラー・ポテンシャルの勾配に等しくなる．すなわち

$$a_i=-\frac{\partial\chi}{\partial x^i} \tag{96}$$

である．例えば §90 の廻転座標系の場合が，ちょうどこのような場合の例になっていて，(73) と (94) から，この場合

$$\chi=-\frac{1}{2}r^2\omega^2 \tag{97}$$

となる．したがって，速度が零の粒子の重力加速度は r の増加する方向に向きその大きさは $r\omega^2$ に等しい．これは，ちょうど普通の遠心力の式に一致している．

93. 重力場内を運動する時計の進み方

(90) からポテンシャル (γ_i, χ) で記述される重力場中を運動する粒子の固有時として

$$d\tau=dt\left\{\left[\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_i u^i}{c}\right]^2-\frac{u^2}{c^2}\right\}^{1/2} \tag{98}$$

がえられる．τ はその粒子と共に運動する標準時計で測った時間であるから，(98) はここで考えている系の座標時計の進み方 dt と運動している標準時計の進み方との関係を与える．座標系が時間軸に直交している場合には $\gamma_i=0$ であ

るから，

$$d\tau=dt\left(1+\frac{2\chi}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{99}$$

となる．(98) と (99) 式は (II. 38) 式の一般化で，重力場が存在している処における運動している時計のおくれ（または進み）を表わす．

われわれの準拠系に対して静止している時計では，

$$d\tau_0=dt\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)} \tag{100}$$

となり，これは (66′) および (94) と符号する．このように，標準時計の進み方は，その時計が置かれている場所におけるスカラー重力ポテンシャルに依存する．そして重力ポテンシャルが小さいほど，進む速さも小さい．

(100) および (97) によれば，回転する円板上では

$$d\tau_0=dt\sqrt{(1+2\chi/c^2)}=dt\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)} \tag{101}$$

となる．すなわち中心に置かれた標準時計は時刻 $t=T$ を示すが，中心から離れた処に置かれた標準時計ほど，その進み方がおそい．$r>0$ なる場所に置かれた時計がおくれることについては固定系 I にいる観測者と廻転系 S にいる観測者とでその解釈がちがうのである．I にいる観測者は，このおくれを粒子の運動によるものであると説明するであろう．この系には重力場はない，すなわち $\chi=0$ であるが，しかしこの時計は $u=r\omega$ という速度を有する．したがって，I 内で (99) を適用しても

$$d\tau_0=dt\sqrt{(1-u^2/c^2)}=dt\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)} \tag{102}$$

がえられる．これに反し，S 系中では速度 $u=0$ であるが，重力場 $\chi=-\frac{1}{2}r^2\omega^2$ がある．それで (99) は同じ式 (101) または (102) となる．したがって S 系にいる観測者は，この時計のおくれを廻転系には重力場があるということで説明するだろう．

94. 特定の準拠系内での座標変換

ある準拠系 R に対応する 1 組の時空座標を (x^i) とする．変換 (59) によって同じ準拠系 R 内に新しい時空座標を導入することができる．変換 (59) はこの場合 R 中の準拠点の番号のつけ方を変え，座標時計の進み方や配置を変えるだけのことである．もちろん，これによって，標準尺を用いる測定によって決定される R 内の空間幾何学が変更されるわけはない．すなわち (62), (64) および (63) で定義される $d\sigma$ は変換 (59) に対して不変でなければならない．このことの形式的な証明は，附録 4 に掲げてある．

変換 (59) によって準拠系は変化しないから，重力場も変わらないものとせねばならない．しかしながら (94) と (83) で定義された重力ポテンシャル (χ, γ_i) は (57) にしたがって変換される．したがって，この種の変換は電磁ポテンシャルの場合のゲージ変換 (V. 23) と似た性質のものである．ゲージ変換で電磁ポテンシャルは変化するが，これから導かれる電磁場そのものはこれによって変化しなかった．重力ポテンシャルにこのような“ゲージ変換”を施すことにより，多くの場合，ポテンシャルを特に簡単な形にすることができる．先ず第一に，

$$x'^i = x^i, \qquad x'^4 = x'^4(x^i) = f(x^i) \tag{103}$$

という形の変換により，(x'^i) 系でスカラー・ポテンシャルが零になるようにすることが常に可能である．新しい座標時計が静止している標準時計と同じ速さで進むようにするためには，新しい時間変数が $t' = x'^4/c$ であるように選ばなければならぬ．それには (66) と (100) により

$$t' = \tau_0 = \int_0^t \sqrt{(-g_{44})}\,dt + \psi(x^i) = \int_0^t \sqrt{\left(1 + \frac{2\chi}{c^2}\right)}\,dt + \psi(x^i) \tag{104}$$

とおけばよい．ただしこの積分は空間座標 (x^i) を一定に保ちながら行うものとする．また $\psi(x^i)$ は空間座標の任意の函数であってよい．新しい時間変数をこのように選べば，この新しい系でも (100) は成り立つから

$$dt' = d\tau_0 = dt' \sqrt{\left(1 + \frac{2\chi'}{c^2}\right)} = dt' \sqrt{(-g'_{44})}$$

すなわち

$$\chi' = 0, \qquad \gamma'_{44} = -1 \tag{105}$$

となる．

もしこのような変換でベクトル・ポテンシャルが消去できるならばもっと有用な単純化が可能である．なぜならば，そのような新しい座標系は時間軸に直交しているので，あらゆる式が非常に簡単化されるからである．そこで

$$\gamma'_i = 0 \tag{106}$$

となるような変換 (103) を見つけることを試みよう．どんな座標系についても線素は (89) の形にかけ，また，$d\sigma^2$ は変換 (103) に対して不変であるから

$$g'_{44}(dx'^4)^2 = \left[dx^4 - \frac{\gamma_i}{\sqrt{(-g_{44})}}dx^i\right]^2 g_{44}.$$

すなわち

$$dx'^4 = \pm\left(\frac{g_{44}}{g'_{44}}\right)^{1/2}\left(dx^4 - \frac{\gamma_i dx^i}{\sqrt{(-g_{44})}}\right) \tag{107}$$

は (103) 中の $f(x^i)$ という函数の全微分でなければならない．したがって函数

f の時空微分は次のような比になっていなければならない：

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}:\frac{\partial f}{\partial x^2}:\frac{\partial f}{\partial x^3}:\frac{\partial f}{\partial x^4}=\frac{\gamma_1}{\sqrt{(-g_{44})}}:\frac{\gamma_2}{\sqrt{(-g_{44})}}:\frac{\gamma_3}{\sqrt{(-g_{44})}};\ -1 \tag{108}$$

このことは，次の 3 つの方程式が成り立っているということと同等である．

$$\frac{\partial f}{\partial x^\iota}+\frac{\gamma_\iota}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\frac{\partial f}{\partial x^4}=0. \qquad \iota=1,\ 2,\ 3 \tag{109}$$

これらの条件は，重力ポテンシャルの変換性により (106) からもえられる (附録 4 参照)．さて連立微分方程式 (109) が解をもつのは，次のような共立性の条件が満たされる場合に限る．すなわち (109) に演算子

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa}+\frac{\gamma_\kappa}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\frac{\partial}{\partial x^4}$$

を作用してえられる式と，その式で κ と ι を入れかえたものの差を求めれば簡単な計算によって

$$\begin{aligned}\omega_{\iota\kappa}\equiv&\left(\frac{\partial}{\partial x^\iota}+\frac{\gamma_\iota}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\gamma_\kappa}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\\&-\left(\frac{\partial}{\partial x^\kappa}+\frac{\gamma_\kappa}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\gamma_\iota}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\end{aligned} \tag{110}$$

をえるが，これがすべての ι, κ の値について零，すなわち

$$\omega_{\iota\kappa}=0 \tag{111}$$

でなければならないというのが共立性の条件である．(111) と (110) とが，(103) のような型の変換でベクトル・ポテンシャルを零ならしめえるために力学的重力場が満足すべき一般的条件である†．

§90 で考えた回転座標系の場合には，(110), (73) および (74) から直ちにわかるように

$$\omega_{12}=-\omega_{21}=\frac{2r\omega}{c(1-r^2\omega^2/c^2)^2} \tag{112}$$

だけが零でない $\omega_{\iota\kappa}$ の成分で，$r>0$ のところではこれらはたしかに零でない．したがって，廻転系については，(111) なる条件は満足されない．よって，単に座標時計の進み方を変えるだけでこの準拠系内に時間軸に直交する座標系を導入することは**できない**．

R 中に適当な時空座標を選び，g_{ik} のすべての成分，すなわち $\gamma_{\iota\kappa}$, χ および γ_ι が時間変数に無関係になるようにできるとき，この準拠系 R 内で重力場は

† この条件は Weyssenhoff によって見出された．J. v. Weyssenhoff, *Bull. Acad. Polonaise*, Ser. A. p. 252 (1937) を見よ．また *ZS. f. Phys.* **95**, 391 (1935): ibid. **107**, 64 (1937) を見よ．

定常であるという．これと同時に $\gamma_\iota=0$ ならしめえるとき，この重力場は**静的**であるという．したがって，一様に回転している準拠系では重力場は定常である．

95. 加速準拠系の他の簡単な実例

$X^i=(X, Y, Z, cT)$ を慣性系 I 中の擬直交座標とすれば，Galilei 変換 (I. 2)

$$x=X-vT, \qquad y=Y, \qquad z=Z, \qquad t=T \tag{113}$$

は明らかに新しい慣性系 I' を定義し，それは I に対して速度 v で X 軸に沿って運動している．なぜならば $(x, y, z)=$一定なる点に着目すれば，これらはすべて，同じ速度 v で運動しているからである．$(x^i)=(x, y, z, ct)$ とおけば，線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}dx^i dx^k = G_{ik}dX^i dX^k \\ &= dx^2+dy^2+dz^2+2v\,dx\,dt-c^2dt^2(1-v^2/c^2), \end{aligned} \tag{114}$$

すなわち

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1, \quad g_{41}=g_{14}=v/c, \quad g_{44}=-(1-v^2/c^2).$$

で，他はすべて零となる．したがって座標系 (x^i) は時間軸に直交していない．
(63), (64) および (94) から

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\iota=\left(\frac{v}{\sqrt{(c^2-v^2)}}, 0, 0\right), \qquad \chi=-\frac{v^2}{2} \\ &\gamma_{11}=\frac{1}{1-v^2/c^2}, \qquad \gamma_{22}=\gamma_{33}=1, \qquad \gamma_{\iota\kappa}=0 \quad (\iota\neq\kappa) \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

となる．

このように重力ポテンシャルが定数であるから，(95) によって定まる重力場は I' 中では云うまでもなく一定である．そして (104) 型の f による変換 (59) によって，このポテンシャルは消去される．

$$\left.\begin{aligned} &X'=\frac{x}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}, \qquad Y'=y, \qquad Z'=z \\ &T'=\sqrt{(1-v^2/c^2)}\,t-\frac{vx}{c^2\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

によって新しい座標 $X'^i=(X', Y', Z', cT')$ を導入すれば

$$\left.\begin{aligned} &ds^2=dX'^2+dY'^2+dY'^2-c^2dT'^2 \\ &g'_{ik}=G_{ik}, \\ &\gamma'_{\iota\kappa}=\delta_{\iota\kappa}, \qquad \gamma'_\iota=0, \qquad \chi'=0 \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

となる．座標 (X'^i) は，I' 中の擬直交系で，(X^i) とは特殊 Lorentz 変換で結ばれている．

もう1つの例として次の変換によって定義される加速系

$$(x^i)=(x, y, z, ct)$$

を考えよう．すなわち

$$X=x+\frac{1}{2}gt^2,\quad Y=y,\quad Z=z,\quad T=t. \tag{118}$$

(x^i) 系中の各点は，I に対し X 軸方向に一定の加速度 g を有する．簡単な計算により，

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+2gtdxdt-c^2dt^2\left(1-\frac{g^2t^2}{c^2}\right), \tag{119}$$

すなわち

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1,\qquad g_{14}=g_{41}=gt/c,\qquad g_{44}=-\left(1-\frac{g^2t^2}{c^2}\right).$$

で，他の g_{ik} には零である．

ゆえに

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\iota=\left(\frac{gt}{c\sqrt{(1-v^2/c^2)}}, 0, 0\right),\qquad \chi=-\frac{g^2t^2}{2}\\&\gamma_{11}=\frac{1}{1-g^2t^2/c^2},\qquad \gamma_{22}=\gamma_{33}=1,\qquad \gamma_{\iota\kappa}=0\quad(\iota\neq\kappa)\end{aligned}\right\} \tag{120}$$

$t=T<c/g$ である間は，この系は物理的に実現できる系に対応する．それはこの場合に限り系の準拠点は I に対して c よりも小さな速度 gt を有し，$g_{44}<0$ であるからである．

この系では，空間幾何学は空間的線素

$$d\sigma^2=\gamma_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa=\frac{dx^2}{1-g^2t^2/c^2}+dy^2+dz^2 \tag{121}$$

で定義される．この場合ポテンシャルは空間座標に依存しないから，(110) の $\omega_{\iota\kappa}$ なる量は零になる．このことは，変換 (113) によって，ベクトル・ポテンシャルが消去できることを意味する．(109) 式を積分して，変換

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=te^{-g(x+\frac{1}{2}gt^2)/c^2} \tag{122}$$

がえられる．これによってベクトル・ポテンシャルを消去することができる．すなわち ds^2 を (89) の形に書けば，新しい座標系では

$$ds^2=\frac{dx'^2}{1-g^2t^2/c^2}+dy'^2+dz'^2+g'_{44}c^2dt'^2, \tag{122'}$$

となる．ただし

$$\left.\begin{aligned}&g'_{44}=-\frac{e^{2g(x+\frac{1}{2}gt^2)/c^2}}{1-g^2t^2/c^2}=-\frac{e^{2gX/c^2}}{1-g^2T^2/c^2},\\&\gamma'_\iota=0,\quad \gamma'_{\iota\kappa}=\gamma_{\iota\kappa},\quad \chi'=-\frac{c^2(g'_{44}+1)}{2}\end{aligned}\right\} \tag{123}$$

(122′) が (119) と同じものであることは，変換式 (122) を用いてたしかめることができる．

この加速系における重力場は静的ではない．(121) によれば，空間幾何学すら時間に依存する．すなわち相隣る 2 つの準拠点間の距離も時間変数 t に依存する．このことは，加速系における物指の I に対する速度 gt が増していくために，物指が次第に強く Lorentz 短縮を受けていくことを考えれば明らかなことである．I 中の観測者からみれば，われわれの準拠系は変形しないけれども，加速系にいる観測者にとっては，この準拠系は x 軸の方向にゆがんでいく．

t や x の値が小さいとき，すなわち gt/c, gx/c^2 の第 1 次の項のみを残すことにすれば

$$t'=t(1-gx/c^2),\quad g'_{44}=-(1+2gx'/c^2),\quad \chi'=gx'$$

となり，(94) 式から

$$a'_\iota=-\frac{\partial\chi'}{\partial x'^\iota}=(-g,0,0). \tag{124}$$

すなわちこの領域内では重力場は一定であることがわかる．

96. 原点が任意の運動をしている変形しない準拠系

系に対して静止している標準物指で測った 2 つの準拠点間の距離が時間と共に変化しないとき，この準拠系は**変形しない** (剛性 Rigid) という．したがって，§90 で論じた一様に回転する系は変形しない系であるが，§59 の終りで考えた系はそうでない．さて座標 $X_i=(X,Y,icT)$ を担う系 I に対して任意の運動をしている質点について考えよう．その世界線は方程式

$$X_i=f_i(\tau) \tag{125}$$

で表わすことができる．τ はその粒子の固有時である．さて新たに座標 $(x^i)=(x,y,z,ct)$ 系を導入し，これがちょうどその点と一しょに運動する変形しない古典的な直交系に相当する，相対論的な系になるようにすることを試みよう．すなわちこの粒子が常にこの系の原点に位置し，空間軸がその方向を変えないようにする．§46 でわれわれは粒子に対して，瞬間的に静止するように次々に慣性系 $S'(\tau)$ を定めた．そしてこれらは空間軸を回転することなく，無限小 Lorentz 変換を次々に行うことによってえられた．そのとき固定系 (X_i) から $S'(\tau)$ 中の座標 x'_i に移る変換は (IV. 140) で与えられる．その係数 $\alpha_{ik}(\tau)$ は微分方程式 (IV. 136, 137) によって定められる．

さて (IV. 140) で

$$x^\iota=x'_\iota,\qquad x'_4=0,\qquad t=\tau \tag{126}$$

とおくことによって系 (x^i) を定義すれば，系 (x^i) で時刻 t における同時な準拠点が $S'(\tau)$ 系中で $x'_4=0$ における同時な準拠点に一致することがわかる．そして，これら両座標系で，この一致する2つの準拠点は同じ空間座標をもっている．したがって変数 (X^i) と (x^i) を結ぶ変換は

$$X_i=f_i(t)+x^\kappa\alpha_{\kappa i}(t) \tag{127}$$

となる．ここで α_{ik} は (IV. 136) の解である．この式は，系 (x^i) の原点 $x^\iota=0$ に永久に静止する質点の与えられた運動 (125) によって完全に定まる．(127) を微分し (IV. 136) を用いれば，

$$\left.\begin{aligned} dX_i&=[\dot{f}_i(t)+x^\kappa\dot{\alpha}_{\kappa i}(t)]dt+dx^\kappa\alpha_{\kappa i}(t)\\ &=(U_i+x^\kappa\alpha_{\kappa l}\eta_{li})dt+dx^\kappa\alpha_{\kappa i}\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

となる．(128) を線素の式に代入すれば，(IV. 138) により

$$\left.\begin{aligned} &ds^2=dX_idX_i=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2\left[1+\frac{g_\kappa x^\kappa}{c^2}\right]^2\\ &x^i=(x^\iota, ct)=(x, y, z, ct)\end{aligned}\right\} \tag{129}$$

をえる．ここで

$$g_\kappa=g_\kappa(t)=\alpha_{\kappa l}\dot{U}_l=\alpha_{\kappa l}\ddot{f}_l \tag{130}$$

は t のみの函数で，これらは座標系 (x^i) の原点が系 (X_i) に対して行う運動によって完全にきまるものである．g_k は，瞬間静止系 $S'(t)$ ((IV. 42, 42′) 参照) におけるその粒子の加速度の成分である．

(127) で定義される座標系 (x^i) は時間軸に直交な系である．この座標系に対応する準拠系は変形しない系である．なぜならば，2点 (x, y, z) および $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 間の距離は

$$d\sigma^2=dx^2+dy^2+dz^2 \tag{131}$$

で与えられるからである．したがって，その空間幾何学は Eucild 的であり，(x, y, z) は直交空間座標である．そのベクトル・ポテンシャルは零でありスカラー・ポテンシャルとしては，

$$\begin{aligned}\chi&=-\frac{c^2}{2}(g_{44}+1)=\frac{c^2}{2}\left[\left(1+\frac{g_\iota x^\iota}{c^2}\right)^2-1\right]\\ &=(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})\left[1+\frac{(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})}{2c^2}\right]\end{aligned} \tag{132}$$

をえる．したがってその空間座標に依存する仕方は常に同じ型であり，ただ $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}(t)$ だけが原点の運動の仕方によって変るだけである．そしてその重力場は (96) と (132) から

$$\boldsymbol{a}=-\operatorname{grad}\chi=-\boldsymbol{g}(1+(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})/c^2). \tag{133}$$

となる．ゆえに原点の附近

$$(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})\ll c^2$$

では，重力場は一様であり，重力加速度 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{g}=-\boldsymbol{g}(t)$ は t の函数で，それは原点 $\boldsymbol{x}=0$ が I に対して行う運動によって一意的に定まる．

点 $\boldsymbol{x}$ に静止する標準時計の時を刻む速さは，(100) および (132) から

$$d\tau_0=dt[1+(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})/c^2] \tag{134}$$

となる．原点 $\boldsymbol{x}=0$ では $\tau_0=t$，すなわちこの点における座標時計は1つの標準時計である．

この節で考えた型の加速系や §90 の回転系だけが，非永久的重力場の場合に可能な，変形しない準拠系の例であることを示すことができる．

97. X 軸方向に運動する変形しない準拠系

系 (x^i) の原点 O が系 (X_i) の X-軸方向に運動しているとき，係数 α_{ik} は (IV. 154, 147) で与えられ，変換式 (127) は

$$\left.\begin{aligned}
X&=c\int_0^t \sinh\theta dt+x\cosh\theta(t)\\
Y&=y,\qquad Z=z,\\
T&=\int_0^t\cosh\theta dt+x\frac{\sinh\theta(t)}{c}
\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

となる．これは (IV. 155) に (126) を代入することによってえられる．ベクトル (130) に対しては (IV. 154, 146) により

$$\boldsymbol{g}=(g,0,0),\qquad g(t)=c\frac{d\theta}{dt} \tag{136}$$

がえられる．ゆえに (129) から

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2(1+gx/c^2)^2 \tag{137}$$

となる．これは直接 (137) を微分し，これを微分 (dX_i) で表わされた ds^2 の式に代入することによっても容易にえられる．この場合には重力場は x-軸に平行で，条件 (52) は $x=-c^2/g$ なる点を除いて到るところで満足されている．そして点 $x=-c^2/g$ では，g_{44} は零になってしまう．

特に原点 O が一定の静止加速度 g で双曲線運動をしているときには，(IV. 159) により，

$$\left.\begin{aligned}
&\theta(t)=\frac{gt}{c}\\
&\text{すなわち}\\
&g(t)=c\frac{d\theta}{dt}=g=\text{一定}
\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

がえられる．この場合重力場は静的であり，重力ポテンシャルは

$$\chi=-\frac{c^2}{2}(g_{44}+1)=gx\left(1+\frac{gx}{2c^2}\right) \tag{139}$$

となる．

このときには変換式は (135) および (138)，または (IV. 160) および (126) からわかるように

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{gt}{c}-1\right)+x\cosh\frac{gt}{c} \\ Y&=y, \qquad Z=z \\ T&=\frac{c}{g}\sinh\frac{gt}{c}+x\frac{\sinh(gt/c)}{c} \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

となる．

(140) 中の変数 t を消去すれば

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{c^2}{g}\{[(1+gx/c^2)^2+g^2T^2/c^2]^{1/2}-1\} \\ Y&=y, \qquad Z=z \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

となる．このように x, y, z が一定の値をもつ準拠点は，I に対して，$T=0$ で $X=x$, $Y=y$, $Z=z$ なる点を速度零で出発し，X-軸方向に双曲線運動をすることがわかる．この双曲線運動の加速度は

$$\gamma=\frac{g}{1+gx/c^2} \tag{142}$$

である (§29 参照)．そして時刻 T における速度は (140) により

$$v=\frac{dX}{dT}=\frac{gT}{[(1+gx/c^2)^2+g^2T^2/c^2]^{1/2}}=c\tanh\frac{gt}{c} \tag{143}$$

で与えられる．

このように I に対する準拠点の速度は x に依存し，I 中の観測者にとっては座標系 (x^i) に対応する準拠系 R は変形するように見える．I 中の観測者が測定した 2 点 (x, y, z) と $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 間の距離は (141) および (143) から

$$\begin{aligned} dX&=\frac{1+gx/c^2}{[(1+gx/c^2)^2+g^2T^2/c^2]^{1/2}}dx=\frac{1}{\cosh(gt/c)}dx \\ &=\sqrt{(1-v^2/c^2)}\,dx \end{aligned} \tag{144}$$

となる．ここで $v=v(T)$ は考えている点における準拠系 R の I に対する速度である．このように I 中の観測者に対しては，R の各部分は Lorentz の式によって短縮する．

t や x が小さく，gx/c^2 および gt/c の2次以上の項を無視できるときは，ここで考えている準拠系は，§95 の終りに考えた系と同じである．

さて，次に系 (x^i) の重力場中における自由粒子の運動について考えよう，このような点の世界線は (86) で g_{ik} として (137) を用いたものになる．$i=1, 2, 3$ のときは，(86) は

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)g\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2}=\frac{d^2z}{d\tau^2}=0 \tag{145}$$

となる．この粒子が x 軸上の1点から速度零で出発するときは，(145) の最後の式から，

$$y=z=0$$

となる．

(99) と (139) から粒子の固有時と系 (x^i) の時間変数 t の間の関係として

$$d\tau=dt\sqrt{[(1+gx/c^2)^2-u^2/c^2]} \tag{146}$$

をえる．ここで

$$u=\left|\frac{dx}{dt}\right|$$

はその粒子の速さである．(146) は (86) の最後の式と同じである．(145) の独立変数として τ の代りに t を用いれば，(146) から

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{2g/c^2}{1+gx/c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+g(1+gx/c^2)=0 \tag{147}$$

が求められる．初期条件

$$x=x_0, \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=0 \qquad (t=0 \text{ のとき}) \tag{148}$$

に対するこの方程式の解は

$$x=\frac{c^2}{g}\left[\left(1+\frac{gx_0}{c^2}\right)\frac{1}{\cosh gt/c}-1\right] \tag{149}$$

となる．このことはこれを微分して (147) に代入することによって容易にたしかめることができる．

時刻 t におけるこの粒子の速度は

$$\frac{dx}{dt}=-c\left(1+\frac{gx_0}{c^2}\right)\frac{\sinh gt/c}{\cosh^2 gt/c} \tag{150}$$

で，時間 t の経過と共に増大し，極大値

$$u_{\max}=\frac{c(1+gx_0/c^2)}{2}$$

に到達し，その後は減少して $t\to\infty$ でふたたび零になる．$x_0>c^2/g$ のときは，

この粒子の速度は c より大きな値をとる．しかし，(70) と (137) からわかるように u は光の速度

$$w=c(1+gx/c^2)$$

より常に小さい．

$t\to\infty$ でこの粒子は，われわれの座標系における特異面 $x=-c^2/g$ に近づく．そこでは光の速度も零に近づき，いかなる信号も，この壁を超えて伝わることはできない．

x と u の式 (149) および (150) を (146) に代入して，積分すれば座標時間 t における粒子の固有時 τ として

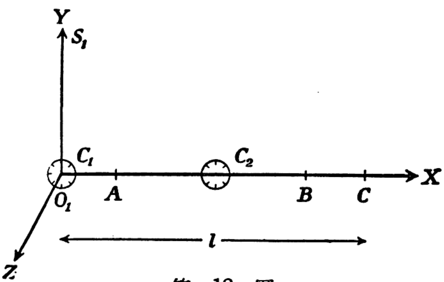
$$\tau=\left(1+\frac{gx_0}{c^2}\right)\int_0^t\frac{dt}{\cosh^2 gt/c}=\left(\frac{c}{g}+\frac{x_0}{c}\right)\tanh\frac{gt}{c} \tag{151}$$

がえられる．

最後に系 (x^i) の原点が X-軸の方向に一定の速度 v で運動しているときは，$\ddot{f}_i=0$ でかつ (130) で定義されたベクトル g_i も零になる．したがって当然のことながら重力場は零となる．何となればこの場合準拠系 R は速度 v で運動する慣性系だからである．さらに U_i は一定で，$f_i=U_i\tau$ であるから，この場合には変換式 (127) は Lorentz 変換そのものになってしまう．

98. 時計の背理

さていよいよ §20 で述べた時計の背理に完全な解決を与える時がきた．この問題は，相対性理論が内部に矛盾を含んでいないかどうかという初期の議論において重要な役割を演じて来たのである†．時空座標系 (X, Y, Z, T) (第 18 図参照) を担う慣性系 S_1 の原点 O_1 にはじめ静止する 2 つの標準時計 C_1, C_2 を考える．時刻 $T=0$ に，時計 C_2 が X-軸の正方向に一定の力 F によって加速されたとする．C_2 が点 A に達したとき速度が v であるとし，そ



第 18 図

† A. Einstein, *Ann, d. Phys.* **17**, 891 (1905); P. Langevin, *Scientia.* **10**, 31 (1911); M. v. Laue. *Phys. ZS.* **13**, 118 (1912): H. A. Lorentz, *Das Relalivitätsprinzip*, 3 Haarlemer Vorlesungen, pp. 31 and 47, Leipzig, 1914; A. Einstein, *Naturw.* **6**, 697 (1918): C. Møller, *Dann. Mat. Fys. Medd.* **20**, No. 19 (1943)

れ以後はこの速度で，点Bに達するまで等速度運動をつづけるとする．そしてBからは大きさがFと同じで，その方向が反対の一定の力が作用するものとする．そうすれば C_2 はCで静止し，ふたたび逆に加速されながらBに到り，そこで速度 $-v$ になる．BとAの間は一定の速度 $-v$ で走り，Aでふたたび一定の力 F で加速され，そして O_1 でふたたび静止する．C_2 が距離 OA, AB, BC を通過するのに要する時間をそれぞれ $\Delta'T$, $\Delta''T$, $\Delta'''T$ で表わす．対称性から考えてCからAに戻る運動はAからCへの運動のちょうど逆でなければならない．また

$$\Delta'''T=\Delta'T$$

であるを要する．この2つの時計がふたたび会うまでに経過した時間を C_1 および C_2 で測定した値をそれぞれ $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ とする．ここで τ_1, τ_2 はそれぞれ C_1, C_2 の固有時である．C_1 は常に点Oに静止しているのだから $\Delta\tau_1$ は，2回の会合の間における S_1 系の時間変数Tの全増分 ΔT に等しい．したがって

$$\Delta\tau_1=\Delta T=2(\Delta'T+\Delta''T+\Delta'''T)=2(2\Delta'T+\Delta''T) \tag{152}$$

となる．同様にして

$$\Delta\tau_2=2(\tau_2'+\tau_2''+\tau_2''')=2(2\tau_2'+\tau_2'') \tag{153}$$

である．ここで τ_2', τ_2'', τ_2''' はそれぞれ OA, AB, BC を通過する間に C_2 の固有時が増した値である．O から A までの時計 C_2 の運動は双曲線運動だから (III. 47) で記述される．すなわち

$$X=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2\right]^{1/2}-1\right\} \tag{154}$$

である．ただし，$g=\dfrac{F}{m_0}$ で，m_0 は C_2 の静止質量である．したがって速度 $u=\dfrac{dX}{dT}$ は

$$u=\frac{dX}{dT}=\frac{gT}{\sqrt{[1+(gT/c)^2]}} \tag{155}$$

となる．したがって

$$v=\frac{g\Delta'T}{\sqrt{[1+(g\Delta'T/c)^2]}}, \tag{156}$$

または

$$g\Delta'T=\frac{v}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}. \tag{157}$$

(155) を用いれば C_2 の固有時 τ_2' を，慣性系 S_1 中で成り立つ特殊相対論の式 (II. 38) によって計算することでができる．すなわち

$$\tau_2'=\int_0^{\Delta'T}\sqrt{(1-u^2/c^2)}dT=\int_0^{\Delta'T}\frac{dT}{\sqrt{[1+(gT/c)^2]}}$$
$$=\frac{c}{g}\sinh^{-1}\frac{g\Delta'T}{c}$$

となる．(157) により，これは

$$\frac{g\Delta'T}{c}=\frac{v/c}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}=\sinh\frac{g\tau_2'}{c}=\sinh\frac{g\tau_2'''}{c}. \tag{158}$$

または

$$\tanh\frac{g\tau_2'}{c}=\frac{\sinh\frac{g\tau_2'}{c}}{\sqrt{\left(1+\sinh^2\frac{g\tau_2'}{c}\right)}}=\frac{v}{c} \tag{158'}$$

と書くことができる．同様にして (II. 38) から

$$\tau_2''=\Delta''T\sqrt{(1-v^2/c^2)} \tag{159}$$

がえられる．

さて，v の値を一定にしておいて力 F の大きさをどんどん増していけば，加速度 $g=F/m_0$ も大きくなり，(158) からわかるように，$g\to\infty$ の極限では，$\Delta'T=\Delta'''T$ も $\tau_2'\equiv\tau_2'''$ も共に零に近づく．この極限では速度 v がほとんど瞬間的にえられることになり，(152), (153), (159) から

$$\Delta\tau_1\equiv 2\Delta''T,\quad \Delta\tau_2=2\tau_2''=2\Delta''T\sqrt{(1-v^2/c^2)}, \tag{160}$$

すなわち

$$\Delta\tau_2=\Delta\tau_1\sqrt{(1-v^2/c^2)} \tag{161}$$

という予想通りの結果がえられる．運動する時計 C_2 は，静止している時計 C_1 に比べおくれることになる．$g\to\infty$ の極限では 2 つの時計の間の距離の極大値は，簡単に

$$l=v\Delta''T \tag{162}$$

で与えられる．

さて次に，これと同じ結果は上に述べた全過程を，C_2 が常にその (座標 (x, y, z, t)) の原点上にあるように，C_2 と運動を共にする変形しない準拠系 S_2 内で取り扱うことによってもえられることを示そう．S_2 が S_1 あるいは遠くにある恒星系に対して加速されている時間中は，S_2 内に重力場が存在する．間隔が $\Delta't=\tau_2'$ の期間 $0<t<\tau_2'$ 中は，この重力場は，スカラー・ポテンシャル (139) によって記述される．また間隔 $\Delta''t=\tau_2''$ の期間 $\tau_2'<t<\tau_2^2+\tau_2''$ の間は $\chi=0$ であり，また間隔が $\Delta'''t=\tau_2'''=\tau_2'=\Delta't$ の期間 $\tau_2'+\tau_2''<t<\tau_2'+\tau_2''+\tau_2'''$ 中は $\chi=-gx(1-gx/2c^2)$ である．はじめの期間 $\Delta't$ の間は，時計 C_1 は x 軸の負の

方向に運動方程式 (149) にしたがって自由に落下する．次に期間 $\Delta''t$ の間は，一定の速度 $-v$ で運動し，期間 $\Delta'''t$ の間は座標が $x_0=-l$ なる点に静止する．この瞬間 S_1 と S_2 は互に静止し，2つの時計の間の最大距離は S_1 で測っても S_2 で測っても同じになる．この瞬間以後は，時計 C_2 は前と逆の運動を行って原点に戻る．時計 C_2 については，これに作用する外力 F と重力場が釣り合っているので，C_2 はこの全過程を通じて S_2 の原点に静止している．

さて時計 C_1 の固有時の増加は一般式 (99) に上に述べた χ の表示を代入して計算することができる．運動方程式 (147) の解は，すでに (149), (150), (151) で与えられている．期間 $\Delta't$, $\Delta''t$, $\Delta'''t$ における C_1 の固有時の増分をそれぞれ τ_1', τ_1'', τ_1''' とすれば，

$$\Delta\tau_1=2(\tau_1'+\tau_1''+\tau_1''') \tag{163}$$

であることは明らかである．C_2 は原点 $x=0$ に静止し，そこでは χ は常に零であるから，同様にして

$$\Delta\tau_2=2(\Delta't+\Delta''t+\Delta'''t)=2(\Delta't+\Delta''t)=2(2\tau_2'+\tau_2'') \tag{164}$$

をえる．

C_1 は原点を速度零で出発するから，τ_1' は (151) で $x_0=0$, $t=\Delta't=\tau_2'$ とおいてえられる．したがって，(158′) により，

$$\tau_1'=\frac{c}{g}\tanh\frac{g\tau_2'}{c}=\frac{v}{g} \tag{165}$$

となる．

$\Delta''t$ の間は，時計 C_1 は重力のない空間を自由に運動するから (159) により，

$$\tau_1''=\Delta''t\sqrt{(1-v^2/c^2)}=\tau_2''\sqrt{(1-v^2/c^2)}=\Delta''T(1-v^2/c^2) \tag{166}$$

となる．最後に，τ_1''' は，(151) で g を $-g$ とおき，$x_0=-l$, $t=\Delta'''t=\tau_2'''=\tau_2'$ とおけばえられる．すなわち (158) により，

$$\tau_1'''=\left(\frac{c}{g}+\frac{l}{c}\right)\tanh\frac{g\tau_2'}{c}=\left(\frac{c}{g}+\frac{l}{c}\right)\frac{v}{c} \tag{167}$$

となる．

v を一定に保って $g\to\infty$ とする極限では，(165) から $\tau_1'\to 0$ であることがわかる．一方，この極限は $\Delta'''t=\tau_2'''=\tau_2'\to 0$ であるが τ_1''' は一定値

$$\tau_1'''=\frac{lv}{c^2} \tag{168}$$

に近づく．この驚くべき結果は重力のスカラー・ポテンシャル $\chi=-gx(1-gx/2c^2)$ が時計 C_1 の進み方に影響することによるものである．$g\to\infty$ の極限では，このポテンシャルは無限大になる．

このように $g\to\infty$ の極限では，(163), (166), (168), (162), (164), および

(159) から

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta\tau_1&=2\left[\Delta''T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\Delta''Tv^2}{c^2}\right]=2\Delta''T\\
\Delta\tau_2&=2\tau_2''=2\Delta''T\sqrt{(1-v^2/c^2)},
\end{aligned}\right\}\qquad(169)
$$

となり (160) と同じ結果がえられる．時計の背理に解決を与えるこの結果は，決して意外なことではない．なぜならば，どんな系においても固有時は一定の値を有する不変量であるからである．

最後に同様な現象で，もっと簡単な例を示そう．それは運動する時計の進み方について重力のベクトル・ポテンシャルが重要な働きをする場合の例である．時計 C_2 が一つの中心力Fによって慣性系 S_1 内で等速円運動をする場合を考えよう．この円の半径をRとし，角速度 ω_1 は一定とすれば，粒子の速さは $R\omega_1$ であり，1回転するごとに固有時は (II. 38) により

$$
\tau_2=T\sqrt{(1-R^2\omega^2/c^2)}=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{(1-R^2\omega^2/c^2)}\qquad(170)
$$

だけ増加する．この円周上に静止する時計 C_1 の固有時はこの間に

$$
\tau_1=T=\frac{2\pi}{\omega}\qquad(171)
$$

だけ増す．

今度は，この現象を §90 で述べた回転円板上の観測者の立場から取り扱ってみよう．この系 S_2 では，時計 C_2 は，特定の点，例えば $(r=R,\ \vartheta=0)$ に静止しているが，C_1 は角速度

$$
\frac{d\vartheta}{dt}=-\omega
$$

で，半径 $r=R$ なる円周上を回転する．C_1 は，ポテンシャルが (74) と (97)，すなわち

$$
\chi=-\frac{1}{2}r^2\omega^2,\qquad \gamma_i=\left(0,\ \frac{\omega r^2}{c\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}},\ 0\right)\qquad(172)
$$

で与えられる重力場の影響をうけて，自由に落下する．g_{ik} が (73) で与えられる場合の運動方程式 (86) の1つの解が $r=\text{const},\ \dfrac{d\vartheta}{dt}=-\omega$ であることは容易にわかる．時計 C_2 は静止し，重力加速度 (96) は力Fと釣り合っている．

$t=\dfrac{2\pi}{\omega}$ なる時間に C_2 の固有時の増加 τ_2 は，静止している時計に対して成立する関係式 (100) から直ちに

$$
\tau_2=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{(1+2\chi/c^2)}=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}\qquad(173)
$$

となり，これは (170) に一致する．

これに相当する C_1 の固有時の増加をきめるには，一般式 (98) を用いなければならぬ．

$$u^\iota=\frac{dx^\iota}{dt}=(0,\ -\omega,\ 0)$$

であるから，(74) から，

$$u^2=\frac{d\sigma^2}{dt^2}=\gamma_{\iota\kappa}\frac{dx^\iota}{dt}\frac{dx^\kappa}{dt}=\gamma_{22}\omega^2=\frac{r^2\omega^2}{1-r^2\omega^2/c^2}$$

がえられる．さらに，(172) を用いれば

$$\gamma_\iota u^\iota=-\frac{r^2\omega^2}{c\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}}$$

であるから，(98) 式から

$$\tau_1=\frac{2\pi}{\omega}\left\{\left(\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}+\frac{r^2\omega^2}{c^2\sqrt{(1-r^2\omega^2/c^2)}}\right)^2 -\frac{r^2\omega^2}{c^2(1-r^2\omega^2/c^2)}\right\}^{1/2}=\frac{2\pi}{\omega} \tag{174}$$

となる．したがって，この場合には，重力ポテンシャルおよび時計 C_1 の速度がその固有時 τ_1 におよぼす (98) で表わされるような影響は，ちょうど打ち消し合ってしまい，τ_1 および τ_2 の値は前例の場合と同じ値になってしまう．ところが上述の 2 つの場合で，この同じ効果の物理的な解釈が全く相異なるのである．S_1 では，この効果が粒子の速度だけによるものであるとするのに反し S_2 では，同じ現象を重力場と運動の両方の効果によるものと解釈するのである．

第 IX 章

永久重力場. 一般 Riemann 空間における テンソル解析

99. 一般相対性原理および等価原理の4次元的定式化

前章では，§88 でわれわれが出発点とした慣性系 I 内の擬直交座標に移れば消去することができるような重力場のみについて考察してきた．そしてそのさい，任意の座標系 (x^i) では重力場の作用は，時空間の線素

$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k \tag{1}$$

を決める計量テンソル g_{ik} によって記述されることを知った．このような非永久的な重力場は時空座標を適当に選ぶことによって，4元空間のあらゆる点で線素が (VIII. 40) の形

$$ds^2=G_{ik}dX^i dX^k \tag{2}$$

をとるようにすることができるという特徴をもっていた．いいかえれば，この場合には，空間は平坦な擬 Euclid 空間である．

ところが等価原理によれば，永久重力場と非永久重力場の間には本質的な区別はありえない．両者は共に同じ基本法則を満足している．したがって，例えば地球や太陽のような大きな質量が存在することによって作られる重力場も，人為的に作らたれ非永久的場の場合と同様に，4元空間における計量テンソル g_{ik} で記述されるものと仮定することにしよう．特に永久重力場を通過する自由粒子（すなわち自由に落下する粒子）および光線の世界線は4元空間中の測地線になり，非永久場の場合と同様 (VIII. 86) および (VIII. 87) で与えられるものと仮定することにしよう．ただ異なる点は，永久重力場は，時空座標を適当に変換するだけで消去することができないことである．すなわち ds^2 は4元空間のあらゆる点について同時に (2) の形に変換することができない．したがって，この場合には4元空間は“曲った”空間で，一般 Riemann 幾何学にしたがう．

ところが §104 で示したように，4元空間の特定の点については計量テンソルの第1階の微分 $\partial\overset{0}{g}_{ik}/\partial\overset{0}{x}{}^l$ が零になり，$\overset{0}{g}_{ik}$ の値が G_{ik} に等しくなるような，いわゆる測地座標系 $(\overset{0}{x}{}^i)$ を，無限に多くの方法で導入することができる．幾

何学的に云えば，この空間は，その各々の点の近傍では平坦である．これは2次元の場合，曲面はある1点の近傍ではその接平面でおきかえてもよいことに相当することである．上に述べた性質を有する時空座標系 $(\overset{0}{x}{}^i)$ を“局所慣性系”という．それは永久重力場の場合，これがちょうど非永久場の場合の慣性系の役割を演ずるものだからである．したがって時空座標 (x^i) を任意に選んだとき，すなわち，物理空間の事象に任意に番号をつけたとき，g_{ik} という量は§89 で述べたのと全く同じ方法で実験的に求めることができる．

一般相対性原理によれば，自然法則はその形が不変であるような方程式の形で表現されなければならない．したがってある法則が

$$F\left(A, B, \cdots\cdots;\ \frac{\partial A}{\partial x^i}, \frac{\partial B}{\partial x^i}, \cdots\cdots\right)=0 \tag{3}$$

という形の式で与えられているならば，これは他の任意の座標系 (x'^i) でも，(x'^i) における物理量の間の同じ函数関係で表わされなければならない．すなわち

$$F\left(A', B', \cdots\cdots;\ \frac{\partial A'}{\partial x'^i}, \frac{\partial B'}{\partial x'^i}, \cdots\cdots\right)=0 \tag{3'}$$

でなければならない．ただし $A, B, \cdots\cdots$ は物理量で，§35 で考えた場合とちがう点は重力場の量 g_{ik} も，(3) 式の物理量 $A, B, \cdots\cdots$ のうちに含められていることである．

特殊相対論では，自然法則が Lorentz 変換に対して不変であることは，4次元のテンソル解析を用いることによって，非常にエレガントに表現された．一般相対論の場合にもこれと類似な自然法則の表現をえるためには，第 IV 章で展開したテンソル解析を擬直交座標系に一般化しなければならない．

非永久重力場の場合には，このような一般化は，単にベクトルやテンソルの概念を時空の一般曲線座標の場合に拡張するだけのことになってしまい，4元空間の幾何学は，特殊相対性理論の場合と同じである．一方，永久重力場の場合には4元空間の構造そのものが異っていて，テンソル解析を一般 Riemann 空間の場合に拡張することが必要になる．しかし後にわかるように，この2つの場合のちがいは形式上はあまり大きなものでなく，平坦な空間における曲線座標について成り立つテンソル式の大部分はそのまゝ曲った空間の場合についても成り立つのである．

100. 4 元ベクトルの共変成分と反変成分

(x^i) を4元空間における任意の曲線座標であるとする．そうすると，この空間における幾何学は，計量テンソル g_{ik} の成分を時空座標の函数として与えれ

ば完全に定まる．g_{ik} はすべての点で (VIII. 52) の条件をみたすものと仮定することにしよう．このことは，行列式

$$g=|g_{ik}|=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \tag{4}$$

が負であることを意味する．この i 行，k 列の元素 g_{ik} に対する小行列式を A_{ik} とすれば，行列式の理論でよく知られている関係から

$$\left.\begin{aligned} &g=\sum_k g_{ik}A_{ik} && (i\text{ について和をとらず}) \\ &\sum_l g_{il}A_{kl}=0 && (\text{ただし } i\neq l) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

がえられる．

$$g^{ik}\equiv\frac{A_{ik}}{g}=g^{ki} \tag{6}$$

によって，対称な 1 組の量 g^{ik} を定義すれば (5) は

$$g_{il}g^{kl}=g_{li}g^{lk}=\delta_i^k \tag{7}$$

となる．ただし

$$\delta_i^k=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases} \tag{8}$$

である．

変換

$$x'^i=x'^i(x^l) \tag{9}$$

によって新しい座標系を導入すれば，§88 で考察した平坦な空間の場合と全く同様にして，(VIII. 54-58 を見よ)

$$\left.\begin{aligned} dx'^i&=\alpha_k^i dx^k=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k \\ dx^i&=\breve{\alpha}_k^i dx'^k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}dx'^k \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\alpha_l^i\breve{\alpha}_k^l=\breve{\alpha}_l^i\alpha_k^l=\delta_k^i, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} g'_{ik}&=\breve{\alpha}_i^l\breve{\alpha}_k^m g_{lm} \\ g_{ik}&=\alpha_i^l\alpha_k^m g'_{lm} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

がえられる．変換 (10), (12) によって，線素を表わす式は

$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k=g'_{ik}dx'^i dx'^k \tag{13}$$

となって不変式となる．

4 元空間の与えられた 1 点で，g'_{ik} が (VIII. 41) で定義した G_{ik} に等しくな

るように変換 (9) を選定することは常に可能である．しかし，すべての点について同時にこのような結果をえることは一般には不可能である．それは α^i_k が α^i_k の定義 (10) からえられる積分可能条件

$$\frac{\partial\alpha^i_k}{\partial x^l}=\frac{\partial\alpha^i_l}{\partial x^k} \tag{14}$$

を満足しなければならぬので，α^i_k をそう勝手に選ぶことができないからである．これができるのは，平坦な空間の場合だけであって，この場合には g_{ik} は特別な条件 (§107 参照) を満足している．

さて，特定の点 (x^i) におけるベクトルとは，どんな座標系でも4つの成分 a^i を有し，これらが (10) の座標の微分の変換と同じ変換

$$a'^i=\alpha^i_k a^k \tag{15}$$

にしたがう量であると定義する．(11) により，この逆変換は

$$a^i=\breve{\alpha}^i_k a'^k \tag{15'}$$

である．

係数 α^i_k と $\breve{\alpha}^i_k$ は座標 (x^i) の函数であるから変換則 (15) と (15′) は，ベクトル a^i を考えている特定の点においてのみ意味を有する．

曲線座標系では，変換式 (15) にしたがう**反変成分**と，各座標系ごとに

$$a_i=g_{ik}a^k \tag{16}$$

によって定義される**同じ**ベクトルの**共変成分** a_i とは区別しなければならない．(7) によれば (16) の逆関係は

$$a^i=g^{ik}a_k \tag{17}$$

である．(16) および (17) なる演算を指標の**下げ上げ**という．Euclid 空間における直交座標系では

$$g_{ik}=\delta_{ik}$$

となり，共変成分と反変成分の間には何の違いもない．

(12), (15) および (17) から，次のような共変成分の変換式

$$a'_i=g'_{ik}a'^k=\breve{\alpha}^l_i\breve{\alpha}^m_k\alpha^k_n g_{lm}a^n=\breve{\alpha}^l_i\delta^m_n g_{lm}a^n=\breve{\alpha}^l_i g_{lm}a^m$$

すなわち

$$a'_i=\breve{\alpha}^k_i a_k \tag{18}$$

および，その逆変換

$$a_i=\alpha^k_i a'_k \tag{19}$$

がえられる．

平坦な (3+1) 空間では，擬直交座標を用いることができ，この系では，あるベクトルの共変，反変成分の関係は，簡単に

$$\left.\begin{aligned} a_i&=G_{ik}a^k=(a^1,\,a^2,\,a^3,\,-a^4)\\ \text{あるいは}\quad a^i&=(a_1,\,a_2,\,a_3,\,-a_4)=G^{ik}a_k \end{aligned}\right\}\tag{20}$$

となる．すなわち，この場合には

$$G^{ik}=G_{ik}\tag{20'}$$

となり，これは (7) と (VIII. 41) に一致する．特殊相対論でも実数のベクトル成分を用いることにすれば，第 IV 章でも共変，反変成分を区別しなければならないことになる．時間成分に虚数を用い，これによって 4 元空間を形式上 Euclid 的にしたのは，このちょっとした複雑さをさけるためであった．いずれにせよ，虚数表示から実数表示に移るのは容易である．虚数表示で，ベクトルの第 4 成分から i を落したものが実数表示での反変成分であると覚えておけば十分である．そうすればそのベクトルの共変成分は (20) にしたがってえられる．

この規則によれば虚数表示で定義されたベクトルのノルム (IV. 25) は，実数表示では

$$a^2=a_ia^i\tag{21}$$

となる．この式は，あらゆる座標変換に対して不変だから，(21) は曲線座標の場合にも成り立つ．事実，(18), (15) および (11) から

$$a'_ia'^i=\breve{\alpha}^l_i\alpha^i_m a_l a^m=\delta^l_m a_l a^m=a_l a^l\tag{22}$$

がえられる．したがって，一般 Riemann 空間でも，(21) をベクトルのノルムと考えることができる．(16) と (17) によれば，(21) をちがった形

$$a^2=a_ia^i=g_{ik}a^ia^k=g^{ik}a_ia_k\tag{23}$$

などと書くこともできる．同様に 2 つのベクトル a と b のスカラー積も不変量で

$$a_ib^i=g_{ik}a^ib^k=a^ib_i=g^{ik}a_ib_k\tag{24}$$

で与えられる．

101. テンソル代数

§§ 39–44 で直交座標系について展開したテンソル算法を一般曲線座標の場合に拡張する方法は，今や明らかである．4 元空間における n 階のテンソルとは，4^n 個の成分をもち，その各々の指標についてはベクトルのような変換を受けるような量である．すなわちテンソルは問題の指標に関して共変であるか反変であるかによって (18) または (15) のような変換を受ける．あるテンソルの共変成分と反変成分との関係は，指標の上げ下げに関する一般規則 (16) および (17) で与えられる．

したがって 2 階のテンソルの反変成分および共変成分の変換法則は

$$t'^{ik}=\alpha^i_l\alpha^k_m t^{lm} \tag{25}$$

$$t'_{ik}=\breve{\alpha}^l_i\breve{\alpha}^m_k t_{lm} \tag{26}$$

である．また任意の座標系における共変，反変両成分の関係は

$$\left.\begin{aligned} t_{ik}&=g_{il}g_{km}t^{lm}\\ t^{ik}&=g^{il}g^{km}t_{lm}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

である．(11) と (12) から，(25-27) 式が互に矛盾しないことも容易にたしかめられる．このような純粋の反変または共変成分のほかに，混合成分

$$t_{i\cdot}^{\ k}=g^{kl}t_{il}=g_{il}t^{lk} \quad \text{および} \quad t^{i}_{\cdot k}=g^{il}t_{lk}=g_{kl}t^{il} \tag{28}$$

を作ることができる．これは

$$t'^{\ k}_{i\cdot}=\breve{\alpha}^l_i\alpha^k_m t_{l\cdot}^{\ m}, \quad t'^{i}_{\cdot k}=\alpha^i_l\breve{\alpha}^m_k t^l_{\cdot m} \tag{29}$$

なる法則によって変換される．$t^i_{\cdot k}$ と $t_{k\cdot}^{\ i}$ とは一般には異なる．

例えば

$$t^{ik}=\pm t^{ki} \tag{30}$$

のような対称性は，すべて不変な性質である．これらは

$$t_{ik}=\pm t_{ki}, \qquad t_{i\cdot}^{\ k}=\pm t^k_{\cdot i} \tag{31}$$

と書いてもよい，(27), (28) によれば，これらは (30) と同等である．したがって対称テンソルでは混合成分 $t_{i\cdot}^{\ k}$ と $t^k_{\cdot i}$ とは相等しい，したがって単に t^k_i と書いてよい．

(12) と (26) を比べてみるとわかるように，g_{ik} という量自身も，2階の対称テンソル——計量テンソル——の共変成分である．さらに (7) からわかるようにこのテンソルの混合成分 g^k_i は Kronecker の記号 δ^k_i となる．また計量テンソルの反変成分は (6) で定義された g^{ik} に等しい．

§41 で考察した直交座標の場合と同様に，この一般の場合にも加法，直積，縮約等によって新しいテンソルを作ることができる．2つの n 階テンソルを加え合せることにより，新たに n 階のテンソルがえられ，また n 階と m 階のテンソルの直積によって $n+m$ 階のテンソルがえられる．最後に，曲線座標の場合には縮約という演算は上と下の指標を等しくおいてこれについて加え合せることで，これによってテンソルの階数は2だけ減少する．2階のテンソルを縮約すれば 0 階のテンソル，すなわち不変量がえられる．変換法則 (29) から直ちにわかるように

$$t'_{i\cdot}{}^{i}=\breve{\alpha}^l_i\alpha^i_m t_{l\cdot}^{\ m}=\delta^l_m t_{l\cdot}^{\ m}=t_{l\cdot}^{\ l} \tag{32}$$

は1つの不変量である．これは (28) により別の形

$$t_{i\cdot}^{\ i}=g_{ik}t^{ki}=g^{ik}t_{ik}=t^k_{\cdot k} \tag{33}$$

と書くこともできる．

(24) 式は直積と縮約を同時に用いる例である．

102. 擬テンソル．対隅テンソル

$\alpha=|\alpha_i^k|$ および $\breve{\alpha}=|\breve{\alpha}_i^k|$ をそれぞれ変換係数 α_i^k と $\breve{\alpha}_i^k$ の行列式とする．行列式の乗法規則により (11) から直ちに

$$\alpha\cdot\breve{\alpha}=1, \tag{34}$$

が，(12) からは

$$g'=|g'_{ik}|=\breve{\alpha}\cdot g\cdot\breve{\alpha}=\breve{\alpha}^2 g=\frac{g}{\alpha^2},$$

すなわち

$$\sqrt{(-g')}=|\breve{\alpha}|\sqrt{(-g)}=\frac{1}{|\alpha|}\sqrt{(-g)} \tag{35}$$

がえられる．ここで $|\breve{\alpha}|$ と $|\alpha|$ は行列式 $\breve{\alpha}$ と α の絶対値を表わす．

擬テンソルとはテンソルの成分と同じに変換されるけれども，その際さらに変換の行列式の符号 $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}=\dfrac{\breve{\alpha}}{|\breve{\alpha}|}$ がかかってくるような変換を受ける成分を有する量であると定義する．α，したがって $\breve{\alpha}$ が正のときは，擬テンソルは，同じ階数のテンソルと同じ変換をうける．§ 43 の場合と同様に，どの座標系においてもその成分が Levi-Civita 記号 δ_{iklm} に等しいような量 A_{iklm} は変換則

$$A'_{iklm}=\alpha\breve{\alpha}_i^r\breve{\alpha}_k^s\breve{\alpha}_l^t\breve{\alpha}_m^u A_{rstu} \tag{36}$$

によって変換される．したがって (35) と (36) から，

$$\epsilon_{iklm}=\sqrt{(-g)}\delta_{iklm} \tag{37}$$

は，完全に反対称な 4 階の擬テンソルの共変成分であることがわかる．

§ 44 と同様な方法で，擬テンソル (37) を用いることによって n 階の反対称テンソルに，一つの $4-n$ 階の対隅擬テンソルを対応させることができる．F^{ik} がある反対称テンソルの反変成分であるときは，その対隅テンソルの共変成分は

$$F^*_{ik}=\frac{1}{2}\epsilon_{iklm}F^{lm}=\frac{1}{2}\sqrt{(-g)}\delta_{iklm}F^{lm}, \tag{38}$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned} &F^*_{23}=\sqrt{(-g)}F^{14}, \quad F^*_{31}=\sqrt{(-g)}F^{24}, \quad F^*_{12}=\sqrt{(-g)}F^{34}\\ &F^*_{14}=\sqrt{(-g)}F^{23}, \quad F^*_{24}=\sqrt{(-g)}F^{31}, \quad F^*_{34}=\sqrt{(-g)}F^{12} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

で与えられる．

2 つの無限小ベクトル a^i, a^k によって反変成分が

$$\sigma^{ik}=a^ib^k-a^kb^i \tag{40}$$

であるような反対称テンソルで記述される平行四辺形が定義され，その面積 σ は $\sigma^2=\dfrac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma^{ik}$ で与えられる．

これに対応する対隅テンソル

$$\sigma^*_{ik}=\sqrt{(-g)}\delta_{iklm}a^l b^m \tag{41}$$

は σ^{ik} に直交する．すなわち $\sigma^*_{ik}\sigma^{ik}=0$ である．3つの無限小ベクトル a^i, b^k, c^l は，反対称テンソル

$$V^{ikl}=\begin{vmatrix} a^i & b^i & c^i \\ a^k & b^k & c^k \\ a^l & b^l & c^l \end{vmatrix}, \tag{42}$$

または，それに対隅な擬ベクトル

$$V_i=\frac{1}{3!}\epsilon_{iklm}V^{klm}=\frac{\sqrt{(-g)}}{3!}\delta_{iklm}V^{klm}=\sqrt{(-g)}\delta_{iklm}a^k b^l c^m \tag{43}$$

で記述される3次元の平行六面体を定義する．これはベクトル a^i, b^i, c^i に直交する．すなわち

$$V_i a^i=V_i b^i=V_i c^i=0$$

である．この平行六面体の体積 V は

$$V^2=-V_i V^i=-\frac{1}{3!}V_{klm}V^{klm} \tag{44}$$

で与えられる．

最後に4つの無限小ベクトル a^i, b^k, c^l, d^m はテンソル

$$\Sigma^{iklm}=\begin{vmatrix} a^i & b^i & c^i & d^i \\ a^k & b^k & c^k & d^k \\ a^l & b^l & c^l & d^l \\ a^m & b^m & c^m & d^m \end{vmatrix}, \tag{45}$$

あるいは，これに対隅な擬不変量

$$\Sigma=\frac{1}{4!}\epsilon_{iklm}\Sigma^{iklm}=\frac{\sqrt{(-g)}\delta_{iklm}}{4!}\Sigma^{iklm}=\sqrt{(-g)}\delta_{iklm}a^i b^k c^l d^m$$

すなわち

$$\Sigma=(-g)\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 & d^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \tag{46}$$

で記述される4次元的平行面体を定義する．

a^i, b^i, c^i, d^i は，それぞれ座標曲線の方向に向いた長さが dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 である無限小ベクトルのときは，$a^i=(dx^1,0,0,0)$，$b^i=(0,dx^2,0,0)$ などであるから，これに対する4次元的体積要素は擬不変量

$$d\Sigma=\sqrt{(-g)}dx^1dx^2dx^3dx^4 \tag{47}$$

で与えられる．これは，正値定号な計量を有する 2 次元空間における体積要素の式 (VIII. 17) の一般化である．3 次元空間の場合にも，同様な方法で，n 階のテンソルに $3-n$ 階の擬テンソルを対応させることができる (附録 5 参照).

103. 測地線. Christoffel の公式

測地線は方程式 (VIII. 30)

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{d\lambda}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda} \tag{48}$$

で定義される．λ は座標変換に対して不変な任意のパラメターであり i, k, l, は 1 から 4 まで変化する．(48) は次のように書いてもよい.

$$g_{ik}\frac{d^2x^k}{d\lambda^2}+\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda}=0.$$

この式に g^{mi} をかければ，(7) により

$$\frac{d^2x^m}{d\lambda^2}+g^{mi}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda}=0.$$

あるいは
$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda}=0 \tag{49}$$

がえられる．

ただし
$$\left.\begin{aligned}\Gamma^i_{kl}&=g^{im}\Gamma_{m,kl}\\ \Gamma_{i,kl}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)=g_{ir}\Gamma^r_{kl}\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

である．(50) で定義される量 Γ^i_{kl}, $\Gamma_{i,lk}$ は **Christoffel の 3 指標記号**と呼ばれるもので，これらが次のような関係を満足することは明らかである.

$$\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk},\qquad \Gamma_{i,kl}=\Gamma_{i,lk},\qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}=\Gamma_{i,kl}+\Gamma_{k,il}. \tag{51}$$

Γ^i_{kl} と $\Gamma_{i,kl}$ の関係はテンソルの共変，反変成分間の関係と同じであるが，次に示すように Christoffel 記号はテンソルのように変換しない.

方程式 (48) または (49) は，座標変換に対して不変な変分原理 (VIII. 21, 29) に対する Euler の方程式であるから，これらは任意の座標系で成り立たなければならない．したがって (10) を微分すれば

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^i}{d\lambda}&=\breve{\alpha}^r_i\frac{dx'^r}{d\lambda}\\ \frac{d^2x^i}{d\lambda^2}&=\breve{\alpha}^r_i\frac{d^2x'^r}{d\lambda^2}+\frac{\partial\breve{\alpha}^i_r}{\partial x'^s}\frac{dx'^r}{d\lambda}\frac{dx'^s}{d\lambda}\\ &=\left(-\breve{\alpha}^i_r\Gamma'^r_{kl}+\frac{\partial\breve{\alpha}^i_k}{\partial x'^l}\right)\frac{dx'^k}{d\lambda}\frac{dx'^l}{d\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

がえられる．ここで，われわれは座標系 (x'^i) について (49) 式を用いた．(52) を (49) に代入すれば

$$\left(-\breve{\alpha}^i_r\Gamma'^r_{kl}+\frac{\partial\breve{\alpha}^i_k}{\partial x'^l}+\Gamma^i_{rs}\breve{\alpha}^r_k\breve{\alpha}^s_l\right)\frac{dx'^k}{d\lambda}\frac{dx'^l}{d\lambda}=0$$

をえる．この式は変数 $dx'^k/d\lambda$ の勝手な値について成り立たなければならないから，括弧で囲まれた k, l に関して対称な式は零でなければならない．このようにしてえられた関係に α^m_i をかければ (11) により Christoffel の関係式

$$\Gamma'^i_{kl}=\alpha^i_r\frac{\partial\breve{\alpha}^r_k}{\partial x'^l}+\alpha^i_r\breve{\alpha}^s_k\breve{\alpha}^t_l\Gamma^r_{st} \tag{53}$$

がえられる．

$\breve{\alpha}^i_k$, α^i_k が定数であるような1次（アフィン）変換に対しては，(53) の右辺の第1項は零となり Christoffel 記号はテンソル成分のように変換されるが，もっと一般の場合にはそうでない．その意味で Γ^i_{kl}, $\Gamma_{i,kl}$ は**アフィン・テンソル**と呼ばれている．

平坦な空間における擬直交系の場合のように g_{ik} が定数のときは，Christoffel 記号 (50) は零になる．

104. 局所慣性系

計量テンソルの成分が座標に無関係になるような座標系を導入することは，一般には不可能である．しかし次に示すように，4元空間の与えられた点 P の近くでは，近似的にそれが可能である．もう少し厳密な云い方をすれば，点 P で $\partial\overset{0}{g}_{ik}/\partial\overset{0}{x}{}^l=0$ になるような座標系 $(\overset{0}{x}_i)$——測地系——を見出すことは常に可能である．(x^i) をある直交座標系とし，点 P における Christoffel 記号の値を $\Gamma^i_{kl}(P)$ とする．(x^i_P) をこの点の座標とすれば変換，

$$\overset{0}{x}{}^i=x^i-x^i_P+\frac{1}{2}\Gamma^i_{rs}(P)(x^r-x^r_P)(x^s-x^s_P) \tag{54}$$

によってこのような座標系がえられる．(53) でダッシュのついた系を $(\overset{0}{x}{}^i)$ 系にとれば (54) から

$$\breve{\alpha}^i_k=\frac{\partial x^i}{\partial\overset{0}{x}_k}=\delta^i_k-\Gamma^i_{rs}(P)\cdot\breve{\alpha}^r_k(x^s-x^s_P),$$

$$\frac{\partial\breve{\alpha}^i_k}{\partial\overset{0}{x}{}^l}=-\Gamma^i_{rs}(P)\left[\frac{\partial\breve{\alpha}^r_k}{\partial\overset{0}{x}{}^l}(x^s-x^s_P)+\breve{\alpha}^r_k\breve{\alpha}^s_l\right]$$

となる．したがって点 P では

$$\breve{\alpha}^i_k(P)=\delta^i_k,\qquad\frac{\partial\breve{\alpha}^i_k}{\partial\overset{0}{x}{}^l}(P)=-\Gamma^i_{rs}(P)\breve{\alpha}^r_k\breve{\alpha}^s_l \tag{55}$$

となり，(55) を (53) に代入すれば点Pで

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{i}_{kl}(P)=0 \tag{56}$$

となる．このときは(50) と (51) からわかるように $\overset{0}{\Gamma}_{i,kl}$ も $\dfrac{\partial \overset{0}{g}_{ik}}{\partial \overset{0}{x}{}^{l}}$ もこの点で零になる．さらに P における計量テンソル g_{ik} の成分は

$$\overset{0}{g}_{ik}(P)=\breve{\alpha}^{l}_{i}\breve{\alpha}^{m}_{k}g_{lm}(P)=g_{ik}(P) \tag{57}$$

となり，(VIII. 63, 94) で定義された重力ポテンシャル $\overset{0}{\gamma}_{i}$, $\overset{0}{x}$ の微分は零になる．このように点Pでは重力加速度は零となり，重力場は局所的に消去されたことになる．座標 $\overset{0}{x}{}^{i}$ に対応する準拠系 $\overset{0}{R}$ を**局所慣性系**という．

座標 (x^i) を担うもとの系Rに対する $\overset{0}{R}$ の原点 $\overset{0}{\mathrm{O}}$ の運動は，(54) で $\overset{0}{x}{}^{\iota}=0$ とおいてえられ，これは

$$0=x^{\iota}-x^{\iota}_{P}+\frac{1}{2}\Gamma^{\iota}_{rs}(P)(x^{r}-x^{r}_{P})(x^{s}-x^{s}_{P})$$

となる．この式を任意のパラメター λ で微分すれば

$$0=\frac{dx^{\iota}}{d\lambda}+\Gamma^{\iota}_{rs}(P)\frac{dx^{r}}{d\lambda}(x^{s}-x^{s}_{P}),$$

$$0=\frac{d^{2}x^{\iota}}{d\lambda^{2}}+\Gamma^{\iota}_{rs}(P)\frac{d^{2}x^{r}}{d\lambda^{2}}(x^{s}-x^{s}_{P})+\Gamma^{\iota}_{rs}(P)\frac{dx^{r}}{d\lambda}\frac{dx^{s}}{d\lambda}$$

となる．事象Pの時刻 $t=t_P=x^4_P/c$ における $\overset{0}{\mathrm{O}}$ の時空座標は

$$x^{i}=x^{i}_{P}\quad \text{および}\quad \overset{0}{x}{}^{i}=0$$

であるから，この瞬間における $\overset{0}{\mathrm{O}}$ の運動は

$$\frac{dx^{\iota}}{d\lambda}=0,\qquad \frac{d^{2}x^{\iota}}{d\lambda^{2}}+\Gamma^{\iota}_{rs}(P)\frac{dx^{r}}{d\lambda}\frac{dx^{s}}{d\lambda}=0 \tag{58}$$

で与えられる．これはRに対して瞬間的に静止している落体の運動方程式 ((48) 参照) に他ならない．

Pを通るすべての測地線は自由に落下する粒子や光線の世界線を含めて，$\overset{0}{x}{}^{i}$ 系では Christoffel 記号が (56) であるような方程式 (49) で記述されることになる．したがってこれは簡単に

$$\frac{d^{2}\overset{0}{x}{}^{i}}{d\lambda^{2}}=0 \tag{59}$$

となる．このようにPの近くの小さな領域では，局所慣性系は普通の慣性系と全く同じ性質を有することになる．さらに，準拠系を変えないように $\overset{0}{R}$ 系内で (VIII. 59) の型の変換を行い，局所擬直交系 $(\overset{0}{X}{}^{i})$ を導入し，点Pで，この系での計量テンソル $\overset{0}{G}_{ik}$ が

$$\overset{0}{G}_{ik}(P)=\begin{cases}1 & i=k=1,\ 2,\ 3\\ -1 & i=k=4\\ 0 & i\neq k\end{cases} \tag{60}$$

となるようにすることができる．それに要する変換は依然1次変換であるから点Pでの計量テンソルの微分は相変らず零，すなわち

$$\frac{\partial\overset{0}{G}_{ik}}{\partial\overset{0}{x}{}^{l}}(P)=0 \tag{61}$$

である．

以後，局所慣性系では常にこのような時空座標を用いることにする．変数 $\overset{0}{X}{}^{i}$ に Lorentz 変換を施せば，一般にもとの局所慣性系に対して運動している新しい局所慣性系に移ることができる．

$\overset{0}{X}{}^{i}$ の2次の量が無視できるようなPの近傍では，この系の計量テンソルは，定数と見なすことができる．そこで等価原理に基き，**点 P におけるすべての自然法則は，それらをこれら局所擬直交座標 $\overset{0}{X}{}^{i}$ で表わしたとき，特殊相対論の場合と同じ形をとる**ものと仮定することにしよう．このとき簡単な座標変換により，これらの法則の一般共変的な形をえることができるが，それを行うためには一般 Riemann 空間におけるテンソル解析を発展させておく必要がある．

105. ベクトルの平行移動

a^i を点 (x^i) におけるベクトルの反変成分とする．

$$d_p a^i=-\Gamma^i_{kl}dx^k a^l \tag{62}$$

なる量を用いて $a^{*i}\equiv a^i+d_p a^i$ という量を定義すれば，Christoffel の式によりこれは隣点 (x^i+dx^i) にある1つのベクトルの反変成分のように変換する．それは次のようにして容易に示すことができる．まず(53)，(10) および (11) から

$$\begin{aligned}d_p a'^i&=-\Gamma'^i_{kl}dx'^k a'^l=-\Gamma'^i_{kl}\alpha^k_m\alpha^l_n dx^m a^n\\&=\left(-\alpha^i_r\frac{\partial\breve{\alpha}^r_k}{\partial x'^l}\alpha^l_k\alpha^k_m-\alpha^i_r\Gamma^r_{mn}\right)dx^m a^n\end{aligned} \tag{63}$$

がえられる．次に (11) を微分して

$$\frac{\partial\breve{\alpha}^i_l}{\partial x^n}\alpha^l_k+\breve{\alpha}^i_l\frac{\partial\alpha^l_k}{\partial x^n}=0 \tag{11'}$$

をえるから，(63) の括弧内の第1項は

$$\begin{aligned}-\alpha^i_r\frac{\partial\breve{\alpha}^r_k}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial x^n}\alpha^k_m&=-\alpha^i_r\frac{\partial\breve{\alpha}^r_k}{\partial x^n}\alpha^k_m=\alpha^i_r\breve{\alpha}^r_k\frac{\partial\alpha^k_m}{\partial x^n}\\&=\frac{\partial\alpha^i_m}{\partial x^n}=\frac{\partial\alpha^i_n}{\partial x^m}\end{aligned}$$

と書ける．この際 (11) と (14) を用いた．したがって (63) は

$$d_p a'^i = \frac{\partial \alpha^i_n}{\partial x^m} dx^m a^n + \alpha^i_r d_p a^r$$

となる．よって dx^i に関する2次の項を無視すれば $a^i + d_p a^i$ という量に関する変換法則は

$$a'^i + d_p a'^i = \left(\alpha^i_n(x) + \frac{\partial \alpha^i_n}{\partial x^m} dx^m\right) a^n + \alpha^i_n d_p a^n$$

$$= \alpha^i_n(x+dx)(a^n + d_p a^n) \tag{64}$$

と書ける．ここで $\alpha^i_n(x+dx)$ は点 (x^i+dx^i) における変換係数であるから，(64) 式は，$a^{*i} = a^i + d_p a^i$ なる量が点 (x^i+dx^i) にある1つのベクトルの反変成分であることを示している．平坦な空間ではベクトル a^{*i} は，ベクトル a^i を点 (x^i) からその隣点 (x^i+dx^i) に平行移動してえられるベクトルに一致する．何となれば，擬直交座標を導入すればこの系では Christoffel 記号したがって $d_p a^i$ は零となり，2つのベクトルの成分 a^{*i} と a^i は等しくなるからである．平坦な空間でも曲線座標を用いれば，この2つのベクトルは (62) で定義される $d_p a^i$ なる量だけ異ってくる．

さて一般 Riemann 空間の場合にも，ベクトルの平行移動を (62) 式で**定義**するのが自然である．

$\overset{0}{X}{}^i$ を考えている点での局所慣性系とすれば，この点におけるベクトルの成分 a^i は擬 Euclid 空間内の擬直交系の場合と全く同様に，平行移動によって変化を受けない．

(62) を用いて，点 (x^i) におけるベクトルのノルムや2つのベクトル a^i, b^i のスカラー積が，平行移動によって変化しないことを示すことができる．すなわち (62) から

$$d_p(g_{ik}a^i a^k) = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} dx^l a^i b^k - g_{ik}\Gamma^i_{ls} dx^l a^s b^k - g_{ik} a^i \Gamma^k_{ls} dx^l b^s$$

$$= dx^l a^i b^k \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{rk}\Gamma^r_{il} - g_{ir}\Gamma^r_{kl} \right\} = 0 \tag{65}$$

をえる．ここでわれわれは (50) と (51) から導かれる恒等式

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{rk}\Gamma^r_{il} - g_{ir}\Gamma^r_{kl} \equiv 0 \tag{66}$$

を用いた．

スカラー積を表わす別の表式 (24) から出発すれば

$$0 = d_p(a_i b^i) \equiv d_p a_i . b^i - a_i \Gamma^i_{kl} dx^k b^l$$

$$\equiv (d_p a_i - \Gamma^l_{ik} dx^k a_l) b^i$$

がえられる．この式は任意のベクトル b^i について成り立つから，平行移動によるベクトルの共変成分の変化

$$d_p a_i = \Gamma^l_{ik} dx^k a_l = \Gamma_{l,ik} dx^k a^l \tag{67}$$

がえられる．最後にスカラー積を $g^{ik}a_i b_k$ という形に表わせば，(67) により

$$0 = d_p(g^{ik}a_i b_k) = dx^l a_i b_k \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{ir}\Gamma^k_{lr} + g^{kr}\Gamma^i_{lr} \right)$$

が求められる．この式は任意の dx^l, a_i, b_k について成り立つから

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{ir}\Gamma^k_{lr} + g^{kr}\Gamma^i_{lr} = 0 \tag{68}$$

が恒等的に満足されなければならない．

(66) に g^{ik} をかけ (7) を用いれば

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} g_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} \tag{68$'$}$$

が成立する．また，行列式に関するよく知られた定理から，行列式 $g = |g_{ik}|$ の微分を

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = A_{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = g g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -g g_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} \tag{69$'$}$$

の形に書くことができる．ただしこの際，(6) と (7) を用いている．

この結果

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{|g|} \tag{69}$$

という関係式がえられ，これは後になって用いられる．

ふたたび (49) で定義される測地線について考える．λ を座標変換に対して不変のパラメターとすれば

$$U^i = \frac{dx^i}{d\lambda} \tag{70}$$

は接線方向を向いた4元ベクトルである．このとき，(49) 式は

$$\frac{dU^i}{d\lambda} = -\Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{d\lambda} U^l \tag{71}$$

と書くことができる．(71) と (62) を比べればわかるように測地線に沿う平行移動により，やはり測地線の方向を向いた別のベクトル U^i がえられる．これは Euclid 空間における直線の性質と同じである．このように2点を結ぶ測地線は長さが停留値をとるような線であるばかりでなく，‘最も真っ直な’線でもある．したがって，この線に沿って，ベクトル U^i のノルムは一定である．すなわち，$g_{ik}U^i U^k$ は λ に無関係である．このことは (VIII. 31) 式と符

号する.

測地線に関するこの性質をベクトル $dx^i/d\lambda$ の反変成分 U_i について表わせば (67) と (51) から，

$$\frac{dU_i}{d\lambda}=\Gamma_{l,ik}U^kU^l=\frac{1}{2}(\Gamma_{l,ik}+\Gamma_{k,il})U^kU^l$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}U^kU^l \tag{72}$$

がえられる．これは (48) と全く同じものである．

(62) 式はあるベクトルをベクトル (dx^i) にそって無限小平行移動を行った場合に，その成分 a^i が受ける変化を定義する．したがって有限の曲線に沿う平行移動によって a^i が受ける変化の全体はこれを積分することによってえられる．平坦な空間では閉曲線に沿って a^i が受ける全変化は零になる．それは直交または擬直交系を用いれば直ちにわかるように，この系では，成分 a^i はあらゆる移動に対して変化を受けないからである．したがって閉曲線に沿う移動の結果えられるベクトル a^{*i} は，はじめのベクトル a^i に等しい．このことは曲線座標を導入した後にも成り立っていなければならない．ところが曲った空間では，a^{*i} は一般に a^i と異なり，差 $a^{*i}-a^i$ は閉曲線に依存する (§107 参照)．したがって，P_1 と P_2 を結ぶある曲線に沿って P_1 から P_2 まで平行移動されたベクトルが与えられたとき，このベクトル a^{*i} は，空間が曲っているときには，曲線の形に依存し，空間が平坦なときには，曲線の形に依存しない．事実，このことが曲った空間と平坦な空間とのただ 1 つの本質的なちがいなのである．

106. テンソル解析．共変微分

特殊相対性理論における平坦な擬 Euclid 空間の場合と同様に，Riemann 空間でも，この空間の各点に n 階のテンソル（または擬テンソル）が附随するとき，これを n 階のテンソル場（または擬テンソル場）という．§48 と同様に，微分の操作により，このテンソル場から新しい $n+1$ 階のテンソル場を導くことができる．0 階のテンソル，すなわちスカラー場

$$\phi'(x')=\phi(x) \tag{73}$$

から，その共変成分が

$$\mathrm{grad}_i\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{74}$$

であるようなベクトル場 grad ϕ を導くことができる．(73) と (10) から直ちに

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i}=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}=\breve{\alpha}^k_i\frac{\partial\phi}{\partial x^k} \tag{75}$$

がえられるが，これは$\dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}$が実際に，1つのベクトルの共変成分であることを示している．

ところが，これと全く同様に変換式 (15) を微分することにより，ベクトル場 a^i から，2階のテンソル場を導こうとすると

$$\frac{\partial a'^i}{\partial x'^k}=\frac{\partial a^i_l}{\partial x'_k}a^l+\alpha^i_l\breve{\alpha}^m_k\frac{\partial a^l}{\partial x^m} \tag{76}$$

という式がえられる．この式からわかるように，$\partial a^i/\partial x^k$ が1つのテンソルの混合成分となるのは係数 α^i_l が定数である場合に限る．ところが一方，Christoffel の式 (53) および (11), (14) および (11′) (272 頁) の関係から

$$\Gamma'^i_{kr}a'^r=\left(-\frac{\partial\alpha^i_l}{\partial x'^k}+\alpha^i_r\breve{\alpha}^s_k\Gamma^r_{sl}\right)a^l \tag{77}$$

がえられる．(76) と (77) を加え合わせてみればわかるように

$$a^i{}_{;k}=\frac{\partial a^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kr}a^r \tag{78}$$

という量が変換法則

$$a'^i{}_{;k}\equiv\frac{\partial a'^i}{\partial x'^k}+\Gamma'^i_{kr}a^r=\alpha^i_l\breve{\alpha}^m_k a^l{}_{;m}$$

にしたがって変換される．このようにあるベクトルの反変成分 a^i から，‘共変微分’という操作 (78) により，1つの2階テンソルの混合成分がえられる．

この操作を幾何学的に述べれば次のようになる．$a^i(P)$ および $a^i(P')$ を，座標がそれぞれ (x^i) および (x^i+dx^i) の隣接2点 P, P' におけるそのベクトル場に属する2つのベクトルとする．このとき，その差

$$da^i=a^i(P')-a^i(P)=\frac{\partial a^i}{\partial x^k}dx^k$$

はベクトルの成分にはならない．何となれば $a^i(P)$ と $a^i(P')$ は相異なる点に所属しているからである．ところが $a^{*i}(P')$ が a^i を P から P^i に平行移動してえられるベクトルであるとすれば，差

$$\begin{aligned}a^i(P')-a^{*i}(P')&=a^i(P')-a^i(P)-(a^{*i}(P')-a^i(P))\\&=\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kr}a^r\right)dx^k=a^i{}_{;k}dx^k\end{aligned}$$

は点 P' における無限小ベクトルを表わすことになる．(dx^k) に関する2次の項を無視すれば，$a^i_{;k}dx^k$ は点 P におけるベクトルでもある．したがって，$a^i_{;k}$ は2階のテンソルの混合成分でなければならない．

以上の考察をベクトル場の共変成分 a_i に適用すれば，平行移動の式 (62) の代りに (67) を用いて，

$$a_{i;k} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ik} a_r \tag{79}$$

という量が1つのテンソルの共変成分になることがわかる．測地系であって，しかも特に平坦な空間における直交座標系においては，Christoffel 記号は全部零になり，共変微分 (78) および (79) は普通の微分に一致する．

さて，パラメター表示が

$$x^i = x^i(\lambda)$$

の曲線上の各点でベクトル $a^i(\lambda)$ が与えられている特別の場合を考えれば，λ に関するこのベクトルの**共変微分**は

$$\left.\begin{aligned} \frac{Da^i}{d\lambda} &= \frac{da^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} U^k a^l \\ U^i &= \frac{dx^i}{d\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

で定義される．$Da^i(\lambda)/d\lambda$ という量は明らかに座標が $x^i(\lambda)$ なる点 P におけるベクトルである．何となれば (62) から

$$\frac{Da^i}{d\lambda} = \lim_{P' \to P} \frac{[a^i(P') - a^i(P) - (a^{*i}(P') - a^i(P))]}{\Delta\lambda} = \lim_{P' \to P} \frac{a^i(P) - a^{*i}(P')}{\Delta\lambda} \tag{80'}$$

であることがわかるからである．ここで P' は座標が $x^i(\lambda + d\lambda)$ の点で，この極限操作ではこの曲線に沿って点 P に近づくものとする．同様に共変成分 a_i の**共変微分**として

$$\frac{Da_i}{d\lambda} = \frac{da_i}{d\lambda} - \Gamma_{l,ik} U^k a^l = \frac{da_i}{d\lambda} - \Gamma^l_{ik} U^k a_l \tag{80''}$$

がえられる．

(51) により

$$\begin{aligned} \frac{Da_i}{d\lambda} &= \frac{d(g_{ik}a^k)}{d\lambda} - \Gamma_{l,ik} U^k a^l = \frac{dg_{ik}}{d\lambda} a^k + g_{ik} \frac{da^k}{d\lambda} - \Gamma_{l,ik} U^k a^l \\ &= \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il}\right) U^l a^k + g_{ik} \frac{da^k}{d\lambda} = g_{ik} \frac{da^k}{d\lambda} + \Gamma_{i,kl} U a^k \\ &= g_{ik}\left(\frac{da^k}{d\lambda} + \Gamma^k_{lm} U^l a^m\right) = g_{ik} \frac{Da^k}{d\lambda} \end{aligned} \tag{80'''}$$

という関係が求められる．すなわち，$Da_i/d\lambda$ および $Da^i/d\lambda$ は同じベクトルの共変および反変成分である．

さて (71) と (72) によれば，自由粒子の世界線は

$$\frac{DU^i}{d\lambda}=0 \quad \text{または} \quad \frac{DU_i}{d\lambda}=0 \tag{80$^{\text{iv}}$}$$

と書くことができる.

この共変微分の操作は，さらに高階のテンソル場，例えば共変成分が t_{ik} の2階のテンソル場にも適用することができる．各各の指標についてはベクトルの場合と同じ規則によって変換されるから

$$t^{ik}{}_{;l}=\frac{\partial t^{ik}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{lr}t^{rk}+\Gamma^k_{lr}t^{ir}, \tag{81}$$

という量は，2つの反変指標と1つの共変指標を有する3階のテンソルの混合成分である．このことはテンソルと Christoffel 記号の変換則を用いるベクトル場の場合と同じようにしてたしかめることができる．同様に

$$\left.\begin{aligned} t_{ik;l}&\equiv\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_l}-\Gamma^r_{il}t_{rk}-\Gamma^r_{kl}t_{ir}\\ t^i_{\cdot k;l}&\equiv\frac{\partial t^i_{\cdot k}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{lr}t^r_{\cdot k}-\Gamma^r_{kl}t^i_{\cdot r}\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

はそれぞれ3階テンソルの純共変成分および混合成分である．

これらの規則は n 階のテンソル場の場合にも拡張することができる．この場合には Christoffel 記号を含む項の数は n 個になる．そしてスカラー場の場合には

$$\phi_{;i}\equiv\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{83}$$

であるとすれば，この規則は階数0なるテンソル場の場合にも通用する．2つのベクトル場 a^i, b^i のスカラー積 a_ib^i は，1つのスカラー場であるから

$$\begin{aligned}(a_ib^i)_{;k}&=\frac{\partial a_i}{\partial x^k}b^i+a_i\frac{\partial b^i}{\partial x^k}=\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k}-\Gamma^r_{ik}a_r\right)b^i+a_i\left(\frac{\partial b^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kr}b^r\right)\\ &=a_{i;k}b^i+a_ib^i{}_{;k}\end{aligned} \tag{84}$$

となり，共変微分に対しても普通の積に関する微分の規則が成立する．この規則は，任意の階数の2つのテンソルを縮約した積に対しても成り立つことがわかる．たとえば

$$\left.\begin{aligned}(t_{ik}a^k)_{;l}&=t_{ik;l}a^k+t_{ik}a^k{}_{;l}\\ (t^{ik}a_k)_{;l}&=t^{ik}{}_{;l}a_k+t^{ik}a_{k;l}\end{aligned}\right\}, \tag{85}$$

となる．

さて恒等式 (66) および (68) は

$$g_{ik;l}\equiv0, \qquad g^{ik}{}_{;l}\equiv0 \tag{86}$$

と書ける．すなわち計量テンソルの共変微分は零である．したがって (16) と

(17) を共変微分して，

$$\left.\begin{aligned} a_{i;l} &= g_{ik;l}a^k + g_{ik}a^k{}_{;l} = g_{ik}a^k{}_{;l} \\ a^i{}_{;l} &= g^{ik}a_{k;l} \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

がえられる．すなわち $a_{i;k}$ および $a^i{}_{;k}$ という量は**同じ** 2 階のテンソルの成分である．同様に (81) と (82) で定義される $t^{ik}{}_{;l}$, $t^i{}_{.k;l}$ および $t_{ik;l}$ なる量は**同じ** 3 階のテンソルの成分である．

§48 で特に擬 Euclid 空間の場合に定義した微分演算子を一般化したものを求めるには §48 の微分を共変微分でおきかえるだけでよい．そうすれば，例えばベクトル場 a_i の回転は

$$\mathrm{curl}_{ik}\{a_\nu\} = a_{k;l} - a_{i;k} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \tag{88}$$

となる．この場合には，Christoffel 記号を含む項はちょうど打消し合ってしまう．

ベクトルの発散を共変的に一般化したものは，テンソル $a^i{}_{;k}$ を縮約したものとしてえられる．すなわち

$$\mathrm{div}\{a^i\} = a^i{}_{;i} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ir}a^r \tag{89}$$

である．(69) によりこれはまた

$$\mathrm{div}\{a^i\} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{a^i}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}a^i) \tag{90}$$

と書くこともできる．

(3+1) 空間では g は負，すなわち $|g| = -g$ である．また計量テンソルが正値定号であるような空間では $g>0$ で $|g| = g$ である．そして d'Alembert の演算子に対する共変的な表式は

$$\Box\psi = \mathrm{div}\{\mathrm{grad}\,\psi\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{(|g|)}g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right) \tag{91}$$

となる．

テンソル場 T^{ik} の発散の反変成分は

$$\begin{aligned} \mathrm{div}^i\{T^{ik}\} = T^{ik}{}_{;k} &= \frac{\partial T^{ik}}{\partial x} + \Gamma^i_{kr}T^{rk} + \Gamma^k_{kr}T^{ir} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{|g|})T^{ik}) + T^i_{kl}T^{kl} \end{aligned} \tag{92 a}$$

であり，これと同様にその共変成分は

$$\mathrm{div}_i\{T_{i.}^{\ k}\} = T_{i.;k}^{\ k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{(|g|)}T_{i.}^{\ k}) - \Gamma_{r,is}T^{rs}. \tag{92 b}$$

となる．対称テンソルの場合には，(51) により，これは

$$\mathrm{div}\{T^k_i\}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{(|g|)}T^k_i)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}T^{rs} \tag{92 c}$$

となる．

反対称テンソル F^{ik} に対しては，Γ^i_{kl} が下の指標について対称であることから，(92 a) の末項は零になる．ゆえに

$$\mathrm{div}^i\{F^{ik}\}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{(|g|)}F^{ik}) \tag{93}$$

となる．さらに反対称テンソルの回転は

$$\mathrm{curl}_{ikl}\{F_{ik}\}=F_{ik;l}+F_{kl;i}+F_{li;k}=\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} \tag{94}$$

となる．この場合にも Christoffel 記号を含む項は打消し合ってしまう．

Gauss の定理 (IV. 191) の一般化の仕方は明らかである．(43), (47) および (90) を用いれば (3+1)-空間で任意のベクトル場 a^i に対して，

$$\int_\Sigma \mathrm{div}\{a\}d\Sigma=\int\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{(-g)}a^i)dx^1dx^2dx^3dx^4$$

$$=\int_V a^i dV_i=\int a^i\sqrt{(-g)}\delta_{iklm}dx^k\delta x^l\Delta x^m \tag{95}$$

がえられる．ここに (dx^k), (δx^l), (Δx^m) は 4 次元領域の 3 次元的境界 V 内の無限小ベクトルである．

107. 曲率テンソル

a_k を任意のベクトル場，$a_{k;l}$ をその共変微分によってえられる 2 階のテンソルとする．これは次の 2 つの形に書くことができる．すなわち

$$a_{k;l}=\frac{\partial a_k}{\partial x^l}-\Gamma^r_{kl}a_r=\frac{\partial a_k}{\partial x^l}-\Gamma_{r,kl}a^r. \tag{96}$$

同様に，これをもう一度共変微分してえられる 3 階テンソルも次の 2 つの形に書くことができる．

$$a_{k;lm}=\frac{\partial a_{k;l}}{\partial x^m}-\Gamma^r_{km}a_{r;l}-\Gamma^r_{lm}a_{k;r}$$

$$=\frac{\partial a_{k;l}}{\partial x^m}-\Gamma_{r,km}a^r{}_{;l}-\Gamma^r_{lm}a_{k;r}. \tag{97}$$

ここで，$a^r{}_{;l}$ は (78) または (87) で与えられる量である．

(97) の $a_{k;lm}$ の第一の形に (96) 式を代入すれば，$a_{k;lm}$ として，a_i およびその 1 階，2 階の微分に関する 1 次式がえられる．ところが，共変微分の順序を逆にしてえられるテンソル $a_{k;ml}$ をこれから引き算すれば，a_i の微分は消

え

$$a_{k;lm}-a_{k;ml}=-R^{i}_{\cdot klm}a_i, \tag{98}$$

がえられる．ただし，この式の a_i の係数 $R^{i}_{\cdot klm}$ は

$$R^{i}_{\cdot klm}=\frac{\partial\Gamma^{i}_{kl}}{\partial x^m}-\frac{\partial\Gamma^{i}_{km}}{\partial x^l}+\Gamma^{i}_{rm}\Gamma^{r}_{kl}-\Gamma^{i}_{rl}\Gamma^{r}_{km} \tag{99}$$

で与えられる．

(96) および (97) の第 2 の形を用いた場合にも，これと同様にして

$$a_{k;lm}-a_{k;ml}=-R_{iklm}a^i \tag{100}$$

がえられる．ここで

$$\begin{aligned}R_{iklm}&=\frac{\partial\Gamma_{i,kl}}{\partial x^m}-\frac{\partial\Gamma_{i,km}}{\partial x^l}+\Gamma^{r}_{il}\Gamma_{r,km}-\Gamma^{r}_{im}\Gamma_{r,kl}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}+\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}\right)+\\&\quad+g^{rs}(\Gamma_{r,il}\Gamma_{s,km}-\Gamma_{r,im}\Gamma_{s,kl})\end{aligned} \tag{101}$$

である．

(98) と (100) の左辺はベクトル場 a_i に対するテンソル場の成分であるから $R^{i}_{\cdot klm}$ および R_{iklm} は同じ 4 階のテンソルの成分でなければならぬ．すなわち

$$R^{i}_{\cdot klm}=g^{in}R_{nklm} \tag{102}$$

である．テンソル R_{iklm} を **Riemann-Christoffel の曲率テンソル**という．(98) はベクトル場の共変微分の交換の法則を与えるものである．またテンソル場 t_{ik} の共変微分の交換の法則も

$$t_{kl;mn}-t_{kl;nm}=-R^{i}_{\cdot kmn}t_{il}-R^{i}_{\cdot lmn}t_{ki} \tag{103}$$

となることが容易にわかる．曲率テンソルの幾何学的意味を明らかにするには，2 つの無限小ベクトル (dx^i)，(δx^i) で囲まれた無限小平行四辺形に沿って，ベクトル a^i を平行移動することについて考えればよい．§105 に述べたように，この操作によってえられるベクトル a^{*i} は一般にはベクトル a^i と異なる．平行移動の法則 (62) と (67) によりこの両ベクトルの差

$$\Delta a^i=a^{*i}-a^i,\qquad \Delta a_i=a^{*}_i-a_i$$

は簡単な計算の結果

$$\Delta a^i=\frac{1}{2}R^{i}_{\cdot klm}a^k d\sigma^{lm},\qquad \Delta a_i=\frac{1}{2}R_{iklm}a^k d\sigma^{lm} \tag{104}$$

となることをたしかめることができる．ただし

$$d\sigma^{lm}=dx^l\delta x^m-dx^m\delta x^l$$

である．

平坦な空間では，計量テンソルの成分が定数となるような座標系を導入する

ことができるので，明らかに

$$R_{iklm}=0 \tag{105}$$

である．すなわちこの式は空間が平坦であるための必要条件である．ところが，これは十分条件でもある．何となれば，もし (105) があらゆる点で成り立つなら，変換された成分 g'_{ik} が時空変換 (x'^i) に無関係になるような変換 (9) を求めることができる (附録6参照) からである．

(101) から直ちに曲率テンソルが

$$R_{iklm}=-R_{ikml}=-R_{kilm}=R_{lmik}, \tag{106 a}$$

$$R_{iklm}+R_{ilmk}+R_{imkl}=0 \tag{106 b}$$

という関係を満足することがわかる．これらの代数的関係のほかに，曲率テンソルは次のようにしてえられる1組の微分恒等式を満足する†．縮約を受けた積の共変微分に関する一般的規則を用いて (88) から共変微分により

$$a_{k;lmn}-a_{k;mln}=-R^i_{\cdot klm;n}a_i-R^i_{\cdot klm}a_{i;n}$$

がえられる．指標 l, m, n を Cyclic に入れかえてえられる他の2つの式と上の式を加え合せて

$$\begin{aligned}(a_{k;lmn}-a_{k;lnm})+(a_{k;mnl}-a_{k;mln})+(a_{k;nlm}-a_{k;nml})\\ =-(R^i_{\cdot klm;n}+R^i_{\cdot kmn;l}+R^i_{\cdot knl;m})a_i\\ -(R^i_{\cdot klm}a_{i;n}+R^i_{\cdot kmn}a_{i;l}+R^i_{\cdot knl}a_{i;m}).\end{aligned} \tag{107}$$

なる関係がえられる．

テンソル $a_{k;l}$, $a_{k;m}$ および $a_{k;n}$ に (103) 式を適用してえられる式を用いて上の式の左辺を変形することができる．そうすれば6つの項がえられるが，そのうちの3つは (106 b) によって打消し合ってしまい，他の3つの項は (107) の右辺の2番目の括弧内の各項と打消し合ってしまう．そして結局

$$(R^i_{\cdot klm;n}+R^i_{\cdot kmn;l}+R^i_{\cdot knl;m})a_i=0$$

という関係がえらる．この式は任意のベクトル場 a_i について成り立つべきであるから，これから **Bianchi の恒等式**

$$R^i_{\cdot klm;n}+R^i_{\cdot kmn;l}+R^i_{\cdot knl;m}\equiv 0 \tag{108}$$

がえられる．恒等式 (106) があるので，曲率テンソルの独立成分の数は4次元空間では 20，3次元空間では 6，2次元空間では1になる．

108. 曲率テンソルの縮約型

4階のテンソル $R^i_{\cdot klm}$ を縮約して2階のテンソルがえられる．これは (106

† 例えば P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, New York, 1942 の 169 頁を見よ．

a) により，別の形

$$R_{ik}=R^{r}_{.irk}=-R^{r}_{.ikr}=-R_{i.rk}^{\ r}=R_{rk.i}^{\ \ r}=R^{r}_{.kri} \tag{109}$$

に書くことができる．この最後の式は，最初の式で i と k を入れかえたものに等しいからこの**縮約曲率テンソル**は明らかに対称テンソルである．すなわち

$$R_{ik}=R_{ki} \tag{110}$$

である．これをもう一度縮約して，曲率スカラー

$$R=R^{i}_{i}=g^{ik}R_{ik} \tag{111}$$

がえられる．

Bianchi の恒等式 (108) を i と l について縮約し (109) と (106 a) を用いれば

$$R_{km;n}+R^{i}_{.kmn;i}-R_{kn;m}=0.$$

あるいは

$$R^{k}_{m;n}-R^{ki}_{..mn;i}-R^{n}_{k;m}=0$$

がえられる．k と m についてさらに縮約すれば，

$$R_{;n}-2R^{k}_{n;k}=0.$$

あるいは，g^{in} をかけ，(86) および積の共変微分の一般規則を用いれば

$$\left(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R\right)_{;k}=0 \tag{112}$$

がえられる．この式は対称テンソル

$$R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R \tag{113}$$

の共変的発散が零であることを表わしている．対称性により，このテンソルの独立成分は 10 である．

(109), (99) および (69) から，R_{ik} に対して次のような陽表的な表示がえられる．

$$\begin{aligned}R_{ik}&=\frac{\partial\Gamma^{l}_{il}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial\Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}}+\Gamma^{r}_{il}\Gamma^{l}_{kr}-\Gamma^{r}_{ik}\Gamma^{l}_{lr}\\&=\frac{\partial^{2}\ln\sqrt{|g|}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}-\frac{\partial\Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}}+\Gamma^{r}_{il}\Gamma^{l}_{kr}-\Gamma^{r}_{ik}\frac{\partial\ln\sqrt{|g|}}{\partial x^{r}}.\end{aligned} \tag{114}$$

第 X 章

物理現象に対する重力場の影響

109. 重力場が存在する場合の自由粒子の力学

一般テンソル算法と，§104 の終りに述べた等価原理に基いてなされた仮定により，特殊相対性理論の物理法則は，あいまいさなくこれを一般化することができる．特殊相対性理論のテンソル方程式はそのまま局所慣性系，すなわち測地時空座標系でも成り立つものと仮定しているから，例えば重力場が存在する場合の力学や電磁力学の基礎方程式を見出す問題は，4-元空間における純幾何学的な問題に帰着する．

まず任意の座標系 (x^i) 内での 1 個の粒子の運動について考えよう．粒子と共に運動する標準時計で測ったその粒子の固有時を τ としその運動の世界線の方程式を

$$x^i = x^i(\tau) \tag{1}$$

とする．そうすると，その 4 次元速度の反変成分は (VIII. 98) により，

$$U^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau} = (\Gamma u^\iota, c\Gamma) \tag{2}$$

となる．ここに $u^\iota = dx^\iota/dt$ は空間的速度の反変成分で

$$\frac{1}{\Gamma} = \left[\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2} - \frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c}\right\}^2 - \frac{u^2}{c^2}\right]^{1/2} \tag{3}$$

は力学ポテンシャルが (γ_ι, χ) であるような重力場が存在する場合の Lorentz 係数に相当するものである．局所慣性系では (2) は (IV. 36) と同等になる．

4 元速度の共変成分は (IX. 16) と (VIII. 63, 64, 94) により，

$$\left.\begin{aligned}
&U_i = g_{ik}U^k = g_{i\kappa}u^\kappa\Gamma + g_{i4}c\Gamma \\
&\text{すなわち} \\
&U_\iota = \Gamma\left[u_\iota - \gamma_\iota(\gamma_\kappa u^\kappa) + c\gamma_\iota\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}\right] \\
&U_4 = -\Gamma c\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2} - \frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

となる．ここで $u_\iota = \gamma_{\iota\kappa}u^\kappa$ は 3 次元速度の共変成分で，その反変成分から空間の計量テンソル $\gamma_{\iota\kappa}$ を用いて計算したものである．純空間的な変換

$$x'^\iota = x'^\iota(x^\kappa) \qquad x'^4 = x^4 \tag{5}$$

により，4元速度の空間部分 U^ι および U_ι はそれぞれベクトルの反変および共変成分のように変換する．しかし座標系 (x^i) が時間に直交していないかぎり U^ι と U_ι とは異なる空間ベクトルを表わす．(IV. 41) によれば

$$U_iU^i=-c^2 \tag{6}$$

がえられる．この式は U^i と U_i を陽表的にに表わしている式 (2) と (4) から導くこともできる．

曲線座標で4元加速度

$$A^i=\frac{DU^i}{d\tau}=\frac{dU^i}{d\tau}+\Gamma^i_{kl}U^kU^l,$$

$$A_i=\frac{DU_i}{d\tau}=\frac{dU_i}{d\tau}-\Gamma_{l,ik}U^kU^l \tag{7}$$

は明らかに，U^i と U_i の固有時に関する共変微分 (IX. 80, 80″) によってえられる．局所慣性系では，(7) は (IV. 42) になる．(IV. 41′) により，

$$U_iA^i=U^iA_i=0 \tag{7′}$$

であることがわかる．

4元運動量ベクトルの反変および共変成分は，(IV. 50) により

$$P^i=\overset{0}{m}_0U^i,\quad P_i=\overset{0}{m}_0U_i \tag{8}$$

である．ここで $\overset{0}{m}_0$ はその粒子の固有質量，すなわち局所静止慣性系で測定した質量である．$\overset{0}{m}_0$ はまたこの粒子を普通の慣性系に置いたときの固有質量でもある．

自由粒子，すなわち重力のみが作用している粒子に対しては，局所慣性系 (x^i) で

$$\frac{d\overset{0}{P}{}^i}{d\tau}=0,\qquad \frac{d\overset{0}{P}_i}{d\tau}=0$$

である．

一般の系 (x^i) ではこれらの方程式は，

$$\frac{DP^i}{d\tau}=0,\qquad \frac{DP_i}{d\tau}=0 \tag{9}$$

という形をとる．ここで

$$\frac{DP^i}{d\tau}=\frac{dP^i}{d\tau}+\Gamma^i_{kl}U^kP^l, \tag{10 a}$$

$$\frac{DP_i}{d\tau}=\frac{dP_i}{d\tau}-\Gamma_{l,ik}U^kP^l \tag{10 b}$$

は4元運動量ベクトルの共変微分を表わす．(IX. 80′) によれば，DP^i は，

$x^i(\tau+d\tau)$ 点に附随する4元運動量ベクトル $P^i(\tau+d\tau)$ と，点 $x^i(\tau)$ に附随する4元運動量ベクトル $P^i(\tau)$ を距離 $dx^i=U^i d\tau$ だけ平行移動してえられるベクトル P^{*i} との差に等しい．したがって，方程式 (9) は，時刻 $\tau+d\tau$ における4元運動量ベクトルが，時刻 τ におけるベクトルを平行移動したものになっていることを示している．(IX. 51) により，(9) の第2式を

$$\frac{DP_i}{d\tau}=\frac{DP_i}{d\tau}-\frac{\overset{0}{m}_0}{2}(\Gamma_{l,ik}+\Gamma_{k,il})U^kU^l=\frac{dP_i}{d\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}U^kP^l=0 \tag{11}$$

と書くことができる．

110. 粒子の運動量と質量および重力

方程式 (9)，または (11) は，与えられた重力場内における1個の質点の運動を決定する．厳密に云えば，その質点自身がまた重力場を作り，これがまた函数 g_{ik} で記述されなければならぬはずである．しかし，この節では，外部から与えられた重力場に比べ質点自身が作る重力は弱く，その g_{ik} におよぼす影響は無視できるものと仮定しよう．そのときに g_{ik} は時空座標 (x^i) の既知函数と考えてよい．

(11) に現われる諸量の物理的意味をよく理解するため，これらの式を3次元ベクトル方程式で書くことを試みよう．

$$\left.\begin{aligned}
&p^\iota=mu^\iota,\\
&p_\iota=mu_\iota=m\gamma_{\iota\kappa}u^\kappa=\gamma_{\iota\kappa}p^\kappa,\\
&m=\overset{0}{m}_0\Gamma=\overset{0}{m}_0\left[\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c}\right\}^2-\frac{u^2}{c^2}\right]^{-1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

によって空間ベクトル p_ι, p^ι を定義する．

$p_\iota=p_\iota(t)$ を時間変数 t の函数と見なし，新たに空間ベクトル

$$\frac{d_cp_\iota}{dt}\equiv\frac{dp_\iota}{dt}-\gamma_{\lambda,\iota\kappa}u^\kappa p^\lambda=\frac{dp_\iota}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{\kappa\lambda}}{\partial x^\iota}u^\kappa p^\lambda \tag{13}$$

を作ることができる．これは空間ベクトル p_ι の t に関する空間的な共変微分である．ここで，$\gamma_{\lambda,\iota\kappa}$ は空間計量テンソル $\gamma_{\iota\kappa}$ によって作った3次元の Christoffel 記号であり，したがって $\dfrac{d_cp_\iota}{dt}$ は4元ベクトル (10 b), (11) に相当する3次元のベクトルである．

$$\frac{dt}{d\tau}=\Gamma,\qquad \gamma_{\iota\kappa}=g_{\iota\kappa}+\gamma_\iota\gamma_\kappa \tag{14}$$

であることに注意すれば，$i=1, 2, 3$ について (11) 式は

$$\frac{d_c p_\iota}{dt}=K_\iota=mG_\iota \tag{15}$$

という形に書くことができる．G_ι は力学的ポテンシャル (γ_ι, χ) およびその第1階の微分に依存する空間ベクトルである（附録7参照）．

$p^\iota=mu^\iota$ を粒子の運動量であると解するならば，K_ι はこの粒子に作用する重力（の共変成分）と解釈しなければならない．したがって，(12) によって定義される比例定数 m はポテンシャルが (γ_ι, χ) の重力場中を速度 u^ι で運動する粒子の慣性質量の役目を果している．$K_\iota=mG_\iota$ であるから，m はまたその粒子の重力質量でもある．静止している粒子に対してはこの質量は，

$$m_0=\frac{\overset{0}{m}_0}{\sqrt{(1+2x/c^2)}} \tag{16}$$

となる，これは重力場における粒子の静止質量を表わす．

粒子の速度が小さくて u/c の項が無視できるような場合には，G_ι は (VII.95) で与えられる a_ι なる量に等しい．しかし，一般には，重力 K_ι は，ポテンシャル，その1次の微分，粒子の速度およびその加速度すらをも含む複雑な式になる．しかし K_ι の式が極めて簡単になる重要な場合が1つある．それは座標系が時間に直交する座標系で，したがってベクトル・ポテンシャル $\gamma_\iota=0$ である場合である．この場合には

$$G_\iota=-\frac{\partial \chi}{\partial x^\iota}, \qquad \boldsymbol{K}=m\boldsymbol{G}=-m\,\mathrm{grad}\,\chi \tag{17}$$

とおけば，(11) のはじめの式は，(15) に同じになる．すなわち，重力は，Newton の理論の場合と同様に，スカラー重力ポテンシャルで表わされる．このことは重力の強さがどのような場合でも，また粒子の速度がどのような場合にも成り立つ（附録7参照）．さらに $\gamma_\iota=0$ なら‘相対論的’質量を表わす式 (12) は

$$m=\frac{\overset{0}{m}_0}{\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}\right)}} \tag{17'}$$

となる．

一方，重力場が弱いときには，力学ポテンシャル (γ_ι, χ) は小さいとして取り扱うことができ，この2次の項および u/c の2次の項を無視すれば

$$G_\iota=-\frac{\partial \chi}{\partial x^\iota}-c\frac{\partial \gamma_\iota}{\partial t}+c\omega_{\iota\kappa}u^\kappa \tag{18}$$

とおくことにより，(11) を (15) の形にかけることがわかる．ここで

$$\omega_{\iota\kappa}=\frac{\partial \gamma_\kappa}{\partial \chi^\iota}-\frac{\partial \gamma_\iota}{\partial x^\kappa}$$

は重力場が弱い場合における (VIII.110) で定義した空間テンソルである．

(18) の最後の項は Coriolis の力の型をしている．§90 で考えた廻転円板の場合には，(VIII. 83) 型の線素を与える座標系

$$x^i=(x, y, z, ct)$$

について (18) に相当する近似を行えば

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\iota=g_{\iota 4}=\frac{\omega}{c}(-y, x, 0)\\ &\chi=\frac{c^2}{2}(-g_{44}-1)=-\frac{r^2\omega^2}{2}\\ &r^2=x^2+y^2 \end{aligned}\right\} \tag{18'}$$

となる．ゆえに

$$\omega_{\iota\kappa}=\begin{vmatrix} 0 & 2\dfrac{\omega}{c} & 0\\ -2\dfrac{\omega}{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

で，重力としては (18) から

$$K_\iota=(m\omega^2x+2m\omega u^2,\ m\omega^2y-2m\omega u^1,\ 0) \tag{18''}$$

がえられる．

中心からの距離 r が小さく，u^2/c^2 の程度の項が無視できるような‘非相対論的’粒子速度に対しては，このように重力は遠心力と Coriolis の力の組合せになる．

通常 γ_ι (およびその空間微分) は χ/c^2 (およびその微分) と同程度，またはそれより微小な量である．u/c が小さいときは，(18) の末項は初項に比べて小さい．さらに重力場が定常または準定常な場合には，(18) の第2項を無視することができ，重力はふたたび Newton の式 (17) で与えられることになる．このように重力が弱く，速度が小さいときは，力学的ベクトル・ポテンシャルの重力に対する寄与は一般にスカラー・ポテンシャルからの寄与より小さい．これは定数 c の値が大きいことによるものである．ベクトル・ポテンシャルが粒子の運動に重大な影響をもつのは，重力場がはげしく揺いでいる場合だけである．

また，重力場の幾何学的な影響が小さく，物理的空間が近似的に Euclid 的な場合には，粒子の運動は，慣性系で (17) の型の力の作用による粒子の運動と同じである．

反変成分 p^ι の t に関する空間的な共変微分は

$$\frac{d_c p^\iota}{dt}=\frac{dp^\iota}{dt}+\gamma^\iota_{\kappa\lambda}\gamma u^\kappa p^\lambda \tag{13'}$$

で定義される．空間計量テンソル $\gamma_{\iota\kappa}$ は t に依存するから，$d_c p^\iota/dt$ および $d_c p_\iota/dt$ は一般に同じ空間ベクトルの成分ではない．(IX. 80‴) をえたのと同様な計算を行えば，この場合

$$\frac{d_c p_\iota}{dt}=\gamma_{\iota\kappa}\frac{d_c p^\kappa}{dt}+\frac{\partial\gamma_{\iota\kappa}}{\partial t}p^\kappa. \tag{19}$$

あるいはこの逆関係として，次式がえられる．

$$\frac{d_c p^\iota}{dt}=\gamma^{\iota\kappa}\frac{d_c p_\kappa}{dt}-\gamma^{\iota\kappa}\frac{\partial\gamma_{\kappa\lambda}}{\partial t}p^\lambda=K^\iota-\gamma^{\iota\kappa}\frac{\partial\gamma_{\kappa\lambda}}{\partial t}p^\lambda. \tag{19'}$$

ただし，　$K^\iota=\gamma^{\iota\kappa}K_\kappa$

は，重力の反変成分である．運動量ベクトルのノルムの時間微分は (19) および (19′) により

$$\frac{d}{dt}(p_\iota p^\iota)=\frac{dp_\iota}{dt}p^\iota+p_\iota\frac{dp^\iota}{dt}=\frac{d_c p_\iota}{dt}p^\iota+p_\iota\frac{d_c p^\iota}{dt}$$

$$=2K_\iota p^\iota-\frac{\partial\gamma_{\iota\kappa}}{\partial t}p^\iota p^\kappa \tag{20}$$

となる．

重力場のポテンシャルが零であるような系($\gamma_\iota=\chi=0$)では，重力は零になり，この粒子の運動は

$$\frac{d_c p_\iota}{dt}=0 \tag{20'}$$

で与えられる．すなわち，相異なる時刻における運動量ベクトルの共変成分は3次元的な意味での平行移動によってえられる．しかし，このことは一般的に運動量ベクトルの大きさが時間的に一定であることを意味しない．何となれば (20) から，

$$\frac{dp^2}{dt}=-\frac{\partial\gamma_{\iota\kappa}}{\partial t}p^\iota p^\kappa \tag{20''}$$

がえられ，準拠系が変形しない場合，すなわち，$\gamma_{\iota\kappa}$ が時間に無関係な場合に限って p が一定になるからである．力学的ポテンシャルが零の場合には

$$m=\frac{\overset{0}{m}_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}},\quad p^2=m^2u^2=\frac{\overset{0}{m}{}_0^2u^2}{1-u^2/c^2}$$

となり，さらに準拠系が変形しないとき u も m も一定となり，運動方程式 (20′) は，

$$\frac{d_c u_\iota}{dt}=0 \tag{20'''}$$

と書くことができる．ゆえに，この場合には，粒子の軌道は物理空間で1つの測地線になる．すなわち，粒子は，この空間の幾何学に矛盾しない“最も真直

な"線の上を等速度で運動することになる．このように，この粒子の運動は慣性系内の滑らかな2次元的曲面上を運動するように束縛された自由粒子の運動と全く類似なものとなる．後者の場合粒子に作用する力は面の法線方向に作用する反作用だけである．本質的なちがいは曲った3次元空間内の粒子の運動を取り扱うことである．

空間的計量テンソルが時間 t と共に変化するときは重力場における粒子の運動は，慣性系内における滑らかな**変形する**面上の粒子の運動に似ている．このように力学ポテンシャルが零のときは，重力場の作用は曲った3次元空間から受ける'法線方向の反作用'の性質をもつことになる

111. 定常重力場における粒子の全エネルギー

(11) のはじめの3式が粒子の運動方程式を表わすのに反し，$i=4$ に対する第4式はエネルギーの保存則でなければならない．この節では定常重力場の場合だけを考えることにする．定常重力場では重力エネルギーの流れは存在しない．一般の場合については後の節 (§126) にまわすことにする．g_{ik} は時間に無関係であるから，問題の式は

$$\frac{dP_4}{d\tau}=0 \tag{21}$$

となる．すなわちこの場合 P_4 は運動の定数である．この定数 $H=-cP_4$ は (4) により

$$\begin{aligned} H=-cP_4&=\overset{0}{m}_0c^2\Gamma\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c}\right\} \\ &=\frac{\overset{0}{m}_0c^2\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c}\right\}}{\left[\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c}\right\}^2-\frac{u^2}{c^2}\right]^{1/2}} \end{aligned} \tag{22}$$

という形であり，重力場における粒子の全エネルギーと解釈することができる (附録7参照)．速度が小さい場合，u/c の2次および高次の項を無視すれば，1次の項は互に打消し合うので，

$$H_0=\overset{0}{m}_0c^2\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2} \tag{23}$$

となる．H_0 は重力場における粒子の静止エネルギーを表わす．u/c について2次の項を残せば，(16) を用いて

$$H=H_0+\frac{1}{2}m_0u^2 \tag{24}$$

がえられる．重力場が弱いときには，この式は重力ポテンシャルが χ の重力場

内の粒子のエネルギーを表わす通常の式

$$H=\overset{\circ}{m}_0c^2+\frac{1}{2}\overset{\circ}{m}_0u^2+\overset{\circ}{m}_0\chi \tag{25}$$

になる．最後の2項は，それぞれ運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを表わす．速度が大きな場合は，エネルギーをこのように運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの部分に分けることはできない．

112. 粒子の一般力学

重力以外の力，例えば電磁力が粒子に作用しているときは，(IV. 55, 57) により，一般座標系で

$$\frac{DP_i}{d\tau}\equiv\frac{dP_i}{d\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}U^kP^l=F_i, \tag{26}$$

$$F_iU^i=0 \tag{27}$$

となる．ここで F_i は，局所慣性系で Minkowski の4元力 (IV. 54) に等しくなるような4元ベクトルである．はじめ，F_i という量の物理的意義は，物理的に明瞭に定義された Minkowski の4元力の変換によってえられるが，F_i の成分は座標系 (x^i) 内自身でも簡単な物理的解釈を与えることができる．$F_\iota=\Gamma\mathfrak{F}_\iota$ とおけば (27) と (2) から

$$F_4=-\frac{1}{c}\Gamma(\mathfrak{F}_\iota u^\iota)=-\frac{\Gamma}{c}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}\cdot\boldsymbol{u})$$

すなわち
$$F_i=\left(\Gamma\boldsymbol{\mathfrak{F}},\ -\frac{\Gamma}{c}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}\cdot\boldsymbol{u})\right) \tag{28}$$

をえる．

$dt=d\tau\cdot\Gamma$ であるから，§110 の場合と同様にして，(26) のはじめの3つの式は

$$\frac{d_c p_\iota}{dt}=K_\iota+\mathfrak{F}_\iota \tag{29}$$

と書くことができる．このことは，反変成分が $\mathfrak{F}_\iota=F_\iota/\Gamma$ である空間ベクトル $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ は，その粒子に作用する非重力的な力と解すべきことを示している．さらに定常的な重力場では，(26) の4番目の式は

$$\frac{dP_4}{d\tau}=F_4,$$

あるいは，(14), (22) および (28) により

$$\frac{dH}{dt}=(\boldsymbol{\mathfrak{F}}\cdot\boldsymbol{u})=\mathfrak{F}_\iota u^\iota \tag{30}$$

と書くことができる．右辺は単位時間に力 $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ によってなされる仕事に等しい

から，この式はエネルギーの保存則を表わしている．

113．時間に直交する座標系．力学ポテンシャルの消去

§94 に示したように (VIII. 59) 型の変換（すなわち準拠系を変えない変換）によって変換されたベクトル・ポテンシャル γ'_ι または $g'_{\iota 4}$ が零になるようにすることは，一般には不可能である．これが可能であるための条件は，

$$\omega_{\iota\kappa}=0$$

となることである．ここで $\omega_{\iota\kappa}$ は (VIII. 110) で定義される空間テンソルである．

しかし，もし準拠系をも変えることを許すならば，一般的な時空変換

$$x'^i=f^i(x^k) \tag{31}$$

により，(x^i) 系で任意の函数 g_{ik} あるいは g^{ik} で記述されるような最も一般的な型の重力場に対してさえ

$$g'_{\iota 4}=0 \tag{32}$$

ならしめることができる．

(32) が満足される場合には，(IX. 7) から

$$g'^{\iota l}g'_{4l}=g'^{\iota 4}g'_{44}=\delta^\iota_4,$$

すなわち
$$g'^{\iota 4}=0,\qquad g'^{44}=\frac{1}{g'_{44}} \tag{33}$$

がえられる．

テンソルの変換式

$$g'^{ik}=\frac{\partial f^i}{\partial x^l}\frac{\partial f^k}{\partial x^m}g^{lm} \tag{34}$$

および $g'^{\iota 4}=0$ であることから

$$0=\frac{\partial f^\iota}{\partial x^l}\frac{\partial f^4}{\partial x^m}g^{lm}\qquad(\iota=1,2,3) \tag{35}$$

がえられる．$f^4(x^k)$ としては，必要条件 (VIII. 50)

$$g'^{44}=\frac{1}{g'_{44}}=\frac{\partial f^4}{\partial x^l}\frac{\partial f^4}{\partial x^m}g^{lm}=\mathrm{grad}_l f^4\,\mathrm{grad}^l f^4<0 \tag{36}$$

を満足するものなら任意の函数を選ぶことができる．函数 $f^\iota(x)$ については3つの線形1階偏微分方程式

$$\mathrm{rad}^l f^4\frac{\partial f^\iota}{\partial x^l}=0 \tag{37}$$

がえられる．このように各函数 f^ι は

$$A^l\frac{\partial f}{\partial x^l}=0 \tag{38}$$

という型の偏微分方程式を満足する．ここで

$$A^{\iota}=\mathrm{grad}^{\iota}\, f^4$$

という量は既知函数と考えている．

この型の方程式の一般解は，3つの変数に関する任意の函数を含んでいる．その3つの変数は独立変数そのもの，またはその任意の組合せである．このように f^{ι} としては (38) の任意の3つの独立な解をとることができる．そうすれば変換 (31) によって，$g'^{\iota 4}=g'_{\iota 4}=0$，または $\gamma'_{\iota}=0$ なる座標系に移ることができる．このようにしてベクトル・ポテンシャルを‘変換によって消去’し，時間に直交する座標系をえることができる．ベクトル・ポテンシャルが消去されるということによってえられる簡単化のために，われわれは将来この可能性をしばしば有効に利用し，時間に直交する座標系を用いる．

以上の議論では函数 $f^4(x)$ としては，非常に弱い制限条件 (36) を満たす勝手なものを選んできたが，$f^4(x)$ を適当に選ぶと，スカラー・ポテンシャルをも零ならしめることができる．次にこのことを示そう．(34) により，$\chi'=0$ なる条件すなわち，$g'^{44}=1/g'_{44}=-1$ なる条件から，函数 f^4 について条件

$$-1=\frac{\partial f^4}{\partial x^{\iota}}\frac{\partial f^4}{\partial x^m}g^{\iota m}=\mathrm{grad}_i\, f^4\,\mathrm{grad}^i f^4, \tag{39}$$

すなわち，函数 $f^4(x)$ の勾配のノルムが定数で -1 に等しくなければならないという条件がえられる．幾何学的にはこの条件は，$f^4(x)=$一定 で定義される超曲面の集りが，これに属する超曲面の相互間の距離が一定であるようなものの集りであることを意味している．このような集りは，限りなくえられる．何となれば，先ず任意に1つの space-like な曲面を選び，他の曲面は次々に法線に沿って測った2面間の距離が面上あらゆる点で一定になるように設定していけばよいからである．さて，このようにしてえられた函数 f^4 を (37) に代入してこれらの方程式を解けば，4つの力学的重力ポテンシャルが全部零になるような座標系に移る変換函数 $f^i(x)$ の一組をえることができる．このような型の系では，(15) 中に現われる重力は零であり，粒子の運動は，289 頁で論じた型のものになる．もし初速度が零であるならば，(20″) から直ちにわかるように粒子はこの系で静止している．したがって，この系の各準拠点は，自由落下する質点を表わしている．このことは変換函数 $f^i(x)$ を実際に決めるのに利用される事柄である．

無限に小さい時空領域以外では永久重力場を変換だけで取り除くことはできないけれども，重力場の**力学的**効果はこのように有限な4次元空間の領域内で消去することができる．そうした後の重力場は完全に幾何学的になり，空間計

量テンソルによって完全に記述される．重力場の力学的性質を変換によって取り除く可能性があることは，理論的には非常に面白いのであるが，実際上それほど重要なことではない．それはこの消去を実行した後の準拠系は一般に剛性でなく，空間計量テンソルが時間に依存するので，この系で物理現象を取り扱うのが非常に繁雑なことになるからである．しかし第 XII 章で宇宙論上の問題を取り扱う場合には，この可能性が利用される（§§133. 134 参照）．

114. 連続系の力学

§109–12 で用いたのと同じ方法で，特殊相対論におけるあらゆる物理法則を一般の共変的な形に書くことができる．第 VI 章の，特殊相対論の場合には，閉じた系の性質は，実数表示で

$$\mathrm{div}_i\{T^{ik}\}=\frac{\partial T^k_i}{\partial x^k}=0 \tag{40}$$

と書かれる方程式 (VI. 1) を満足する対称エネルギー・運動量テンソル T_{ik} で記述することができた．その各成分の物理的意味は，すでに §62 で説明した．方程式 (40) は各局所慣性系内で成り立つものと仮定しているから，エネルギー・運動量の保存則 (IX. 92 c 参照) の一般共変形は

$$\left.\begin{aligned} &T^k_{i;k}=0, \\ \text{または}\quad &\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{(|g|)}T^k_i)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

でなければならない．

慣性系では閉じた系の保存則は，偏微分の和の式で表わされるが，一般の場合には，(41) 式の右辺があるためそうはならない．このことは，重力場におかれると，系はもはや，閉じた系でないことを意味する．重力場自身もこの場合全エネルギーに寄与するのである．この問題については，§126 でもう一度論ずることにする．

任意の座標系 S におけるテンソル T^k_i の成分は，局所慣性系 $\overset{0}{S}$ 内のテンソル $\overset{0}{T}{}^k_i$ からテンソルの変換法則によってえられる．そして，$\overset{0}{T}{}^k_i$ の物理的な意味は特殊相対論の場合と同じであるから，このようにして，$\overset{0}{T}{}^k_i$ の物理的な意味も明らかにされる．$\overset{0}{S}$ 中では，§63, §64 の考察を全部適用することができる．すなわち，物理系が十分小さくて，この系が占める全領域で $\overset{0}{g}_{ik}$ が一定と見なしうる場合には，この系の固有重心をあいまいさなく定義することができる．そして $\overset{0}{S}$ に対してこの点は一定の速度で運動する．したがって S に対

しては自由落下する粒子のように運動する†.

(41) のはじめの3つ式は運動量の保存則を表わし，第4式はエネルギーの保存則を表わす重力場が定常な場合には，(41) において $i=4$ とした式の右辺は零である．したがって，

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{(|g|)}T_4^k)=0 \tag{42}$$

である．附録8に示すように，空間の計量テンソルの成分で作った行列式 $\gamma=|\gamma_{ik}|$ (VIII. 64) は行列式 $g=|g_{ik}|$ と $g=g_{44}\cdot\gamma$ なる関係がある．$g<0$, $\gamma>0$ であるから

$$|g|=-g_{44}\cdot\gamma=\gamma\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right) \tag{43}$$

となる．このように方程式 (42) は

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\sqrt{\gamma}\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}T_4^k\right\}=0 \tag{44}$$

と書くことができる．さて

$$S^i=-c\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}T_4^i,\qquad h=-\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}T_4^4 \tag{45}$$

とおき，$\sqrt{\gamma}$ がこの場合時間に無関係であることに注意すれば (44) は，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}+\frac{\partial h}{\partial t}=0 \tag{46}$$

と書くことができる．ここで

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\gamma}S^i)$$

は空間ベクトル$\boldsymbol{S}$の3次元的発散である(4次元的発散の場合の対応する式(IX 90) 参照).

hと$\boldsymbol{S}$をそれぞれエネルギー密度およびエネルギーの流れと解釈すれば，(46) 式はエネルギーの保存則を表わす．局所慣性系では，(45) は (VI. 2, 3) 式に帰着する．§126 で知るように，運動量密度も同様にして

$$g_i=\frac{1}{c}\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}T_i^4 \tag{47}$$

で与えられる．

この物理系が完全流体の場合には，エネルギー・運動量テンソルは

†A. D. Fokker, *Proc. Amsterdam*, **23**, No. 5, 729 (1921). C. Mφller. *Annales de l'Institut Henri Poincairé*, t. XI fasc, V. 251 (1950)

$$T_i^k=\left(\overset{0}{\mu}{}^0+\frac{\overset{0}{p}}{c^2}\right)U_iU^k+\overset{0}{p}\delta_i^k \tag{48}$$

という形を有する．ここで $U^i=U(x^k)$ は各点 (x^k) における物質の 4 元速度であり，$\overset{0}{\mu}{}^0$ および $\overset{0}{p}$ は，局所慣性系で測った不変な質量密度および圧力である．(48) 式は混合テンソルのように変換し，局所慣性系では，(IV. 104) に帰着するから，これはすべての座標系で T_i^k の正しい式でなければならない．各部分同志が作用をおよぼし合わない物質に対しては，簡単に

$$T_i^k=\overset{0}{\mu}{}^0U_iU^k \tag{49}$$

である．(IX. 84, 85) の一般規則により，保存則 (41) は

$$(\overset{0}{\mu}{}^0U^k)_{;k}\cdot U_i+(\overset{0}{\mu}{}^0U^k)\cdot U_{i;k}=0 \tag{50}$$

と書くことができる．共変微分により (6) から

$$U_{i;k}\,U^i+U_i.U^i{}_{;k}=0$$

がえられ，また

$$U_iU^i{}_{;k}=U^i.U_{i;k}$$

であるから，

$$U^i.U_{i;k}=0 \tag{51}$$

をえる．したがって (50) に U^i をかければ

$$(\overset{0}{\mu}{}^0U^k)_{;k}\equiv\mathrm{div}\{\overset{0}{\mu}{}^0U^k\}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{(|g|\overset{0}{\mu}{}^0U^k)}}{\partial x^k}=0 \tag{52}$$

が成立する．この式は(IV. 211) 式の一般化で固有質量の保存を表わす．

(IX. 79. 80″) により

$$U^kU_{i;k}=\frac{dx^k}{d\tau}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^k}-\Gamma^l_{ik}U_l\right)=\frac{dU_i}{d\tau}-\Gamma^l_{ik}U^kU_l=\frac{DU_i}{d\tau}$$

がえられ，(50) は

$$\overset{0}{\mu}{}^0\frac{DU_i}{d\tau}=0 \tag{53}$$

となる．これは重力が物質に作用する唯一の力である場合の (IV. 215) 式の一般化である．(IX. 80) と比べればわかるように，連続的に分布する相互に作用し合わない物質の各無限小部分は自由落下する粒子のように運動する．

(45), (49), (2) および (4) から，エネルギー密度として

$$h=-\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}\overset{0}{\mu}{}^0U_4U^4=\overset{0}{\mu}{}^0c^2\Gamma^2\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c}\right\} \tag{54}$$

がえられる．ただし Γ は (3) で与えられる．局所慣性系で体積が $d\overset{0}{V}=d\overset{0}{x}{}^1d\overset{0}{x}{}^2d\overset{0}{x}{}^3$ である物質の小部分を考えよう．4 次元体積要素 (IV. 47) の不変性により

$$c\sqrt{(|g|)}dx^1dx^2dx^3dt=cd\overset{0}{x}{}^1d\overset{0}{x}{}^2d\overset{0}{x}{}^3d\tau$$

である．ただしここで S 系での時間は固有時 τ に等しいことを用いた．よって (43) および (14) により物質粒子の体積 dV として

$$\left.\begin{aligned} dV&=\sqrt{\gamma}\,dx^1dx^2dx^3=\frac{d\overset{0}{V}{}^0}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\frac{d\tau}{dt}=\frac{d\overset{0}{V}{}^0}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\\ dV&=\frac{d\overset{0}{V}{}^0\left[\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_\varepsilon u^\varepsilon}{c}\right\}^2-\frac{u^2}{c^2}\right]^{1/2}}{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}}\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

がえられる．これは重力場が存在する場合に対する Lorentz の短縮の式の一般化である．$u^\varepsilon=0$ の場合には

$$dV^0=d\overset{0}{V}{}^0 \tag{56}$$

すなわち，S 系に静止する物質の小片の体積は $\overset{0}{S}{}^0$ 系で測ったその体積に等しい．これは 222 頁で行った一般的仮定に符合することである．

この粒子の固有質量を $\overset{0}{m}_0=\overset{0}{\mu}{}^0d\overset{0}{V}$ で表わせば，その全エネルギー $H=hdV$ は (54) および (55) から

$$H=hdV=\overset{0}{m}_0c^2\Gamma\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}-\frac{\gamma_\varepsilon u^\varepsilon}{c}\right\} \tag{57}$$

となる．これは (22) に符合する．

115. 電磁場の方程式

簡単のため，真空中での電磁力学の場合に限ることにしよう．物質中での巨視的理論への一般化は同じ線に沿って行えばよい．反対称テンソルの発散や回転 (IX. 93, 94) の一般の共変的な式を用いることによって任意の座標系 S における Maxwell の方程式 (V. 9, 13, 16) を次の形に書くことができる．

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0, \tag{58 a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{|g|}F^{ik})=s^i, \tag{58 b}$$

$$s^i=\frac{\overset{0}{\rho}{}^0U^i}{c}. \tag{59}$$

ここで，$F^{ik}=-F^{ki}$ は電磁場テンソル，s^i は 4 元電流密度，$\overset{0}{\rho}{}^0$ は局所慣性系で測った荷電密度，U^i は荷電の 4 元速度である．どの局所慣性系 $\overset{0}{S}$ でも，(58) および (59) は第V章の (13), (16), または (1) になる．

F^{ik} の反対称性により，(58 b) から直ちに

$$\operatorname{div}\{s^i\}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}s^i)=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}(|g|F^{ik})\equiv 0 \tag{60}$$

がえられる．これは荷電の連続方程式の一般形である．

時刻 $t=x^4/c$ において3次元空間の有限な体積 V 内にある系について考えよう．(60) に $\sqrt{|g|}$ をかけ，空間座標 x^1, x^2, x^3 について積分すれば，その i に関する和のはじめの3項は，x^1, x^2, x^3 に関する微分であるから

$$\frac{d}{dx^4}\int_V\sqrt{|g|}s^4dx^1dx^2dx^3=0 \tag{61}$$

となる．したがって

$$e=\int_V\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}s^4\sqrt{\gamma}\,dx^1dx^2dx^3=\int\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}s^4dV \tag{62}$$

という量は時間について一定であって，これはこの系の全電荷と解すべきものである．ゆえに

$$\rho=\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}s^4=\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}\Gamma\overset{0}{\rho}{}^0 \tag{63}$$

は系 S での荷電密度でなければならぬ．さて，体積要素 dV が担う荷電 ρdV について考えよう．局所静止系におけるその体積を $d\overset{0}{V}{}^0$ とすれば，(63) および (55) から

$$\rho dV=\overset{0}{\rho}{}^0d\overset{0}{V}{}^0 \tag{64}$$

がえられる．すなわちいま考えている物質の小片が担っている荷電は座標系に無関係である．

全電荷の不変性は直接，連続方程式 (60) からもえられる．そのために任意の2つの座標系 S および S' を考え

$$x^4=\text{一定}=a \quad \text{および} \quad x'^4=\text{一定}=b$$

で定義される2つの領域に関する積分

$$e=\int_{x^4=a}\sqrt{|g|}s^4dx^1dx^2dx^3, \tag{65}$$

$$e'=\int_{x'^4=b}\sqrt{|g'|}s'^4dx'^1dx'^2dx'^3 \tag{65'}$$

について考えよう．積分 (65) および (65′) が時間に無関係であるから b を適当に選ぶことにより e および e' の値を変えないで，荷電密度が零にならないような4次元空間の領域内で領域 $x'^4=b$ および $x^4=a$ が重なり合わないようにすることができる．次に第3の座標系 S'' を導入し，$x^4=a$ なる領域では S に，$x'^4=b$ なる領域内では S' に一致するようにする．(61) 式は，S'' 系でも成り立

つから,

$$\int_{x''^4=x^4=a}\sqrt{|g''|}s''^4dx''^1dx''^2dx''^3=\int_{x''=x'^4=b}\sqrt{|g''|}s''^4dx''^1dx''^2dx''^3 \quad (66)$$

をえる. 超曲面 $x^4=a$ では $x''^i=x^i$, 領域 $x'^4=b$ では $x''^i=x'^i$ であるから, (66) から

$$e=e' \quad (67)$$

がえられ, これは全荷電の不変性を表わす.

(59), (63) および (2) により,

$$s^i=\left(\frac{\rho u^\iota}{c\sqrt{(1+2\chi/c^2)}},\ \frac{\rho}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\right) \quad (68)$$

がえられ, 連続方程式 (60) は

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\iota}(\sqrt{\gamma}\,\rho u^\iota)+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,\rho}{\partial t}=0,$$

あるいは

$$\mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{u}+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}\,\rho}{\partial t}=0 \quad (69)$$

と書ける. これは空間計量テンソルの行列式が時間に依存する場合の連続方程式の3次元形式である. 変形しない準拠系では γ は t に依存しないから, (69) は通常の

$$\mathrm{dlv}\,\rho\boldsymbol{u}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

になる.

テンソル成分 F^{ik} の物理的意味を詳しく知るため, Maxwell の方程式 (58) を3次元ベクトル方程式の形に書きなおしてみよう. 簡単のため, 座標系は時間に直交するとする. すなわち,

$$\gamma_\iota=g_{\iota4}=0, \qquad \gamma_{\iota\kappa}=g_{\iota\kappa}, \qquad -g_{44}=1+\frac{2\chi}{c^2} \quad (70)$$

であるとする. §113 で示したように, 時空座標さえ適当にとれば, このようにすることは常に可能である.

さて, 2つの反対称空間テンソル $H^{\iota\kappa}$ および $B^{\iota\kappa}$, と3つの空間ベクトル D^ι および E^ι を次の式によって導入する.

$$F^{\iota\kappa}=\frac{H^{\iota\kappa}}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}=B^{\iota\kappa}$$

$$F^{\iota4}=-\frac{D^\iota}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}=-\frac{E^\iota}{1+2\chi/c^2}. \quad (71)$$

したがって, これらの量は方程式

$$B^{\iota\kappa}=\frac{H^{\iota\kappa}}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}},\qquad D=\frac{E}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}} \tag{72}$$

で結ばれている．

(70), (71) を用いると，(IX. 27) およびこれに対応する空間テンソルに関する式から

$$\left.\begin{aligned}F_{\iota\kappa}&=g_{\iota l}g_{\kappa m}F^{lm}=g_{\iota\lambda}g_{\kappa\mu}F^{\lambda\mu}\\&=\gamma_{\iota\lambda}\gamma_{\kappa\mu}B^{\lambda\mu}=B_{\iota\kappa}=\frac{H_{\iota\kappa}}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\\F_{\iota4}&=g_{\iota l}g_{4m}F^{lm}=\gamma_{\iota\kappa}\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)\frac{D^{\kappa}}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\\&=D^{\iota}\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)^{1/2}=E_{\iota}\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

がえられる．

これらの記号を用いれば (58 *a*), (58 *b*) は 3 次元テンソル方程式の形

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{curl}_{\iota\kappa\lambda}\{B_{\iota\kappa}\}=0,\qquad \mathrm{curl}_{\iota\kappa}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_{\iota\kappa}}{\partial t}\\&\mathrm{div}^{\iota}\{H^{\iota\kappa}\}-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{1}{c}\frac{\partial(\sqrt{\gamma}D^{\iota})}{\partial t}=\frac{\rho u^{\iota}}{c},\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

に書くことができる．ここで

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{curl}_{\iota\kappa\lambda}\{B_{\iota\kappa}\}&=\frac{\partial B_{\iota\kappa}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial B_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\iota}}+\frac{\partial B_{\lambda\iota}}{\partial x^{\kappa}}\\\mathrm{curl}_{\iota\kappa}\boldsymbol{E}&=\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x^{\iota}}-\frac{\partial E_{\iota}}{\partial x^{\kappa}}\\\mathrm{div}^{\iota}\{H^{\iota\kappa}\}&=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}(\sqrt{\gamma}H^{\iota\kappa})\\\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}&=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\iota}}(\sqrt{\gamma}D^{\iota})\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

は 3 次元の共変微分演算子である．さらに反対称テンソル $B_{\iota\kappa}$, $H^{\iota\kappa}$ に対偶な軸性ベクトルを

$$\left.\begin{aligned}&B^1=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}B_{23},\quad B^2=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}B_{31},\quad B^3=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}B_{12}\\&H_1=\sqrt{\gamma}H^{23},\quad H_2=\sqrt{\gamma}H^{31},\quad H_3=\sqrt{\gamma}H^{12}\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

によって導入すれば (附録 5 参照)，Maxwell の方程式 (74) は次の見慣れた形をとる．

$$\left.\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial(\sqrt{\gamma}\boldsymbol{B})}{\partial t},\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0\quad\right\} \tag{77}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial(\sqrt{\gamma}\boldsymbol{D})}{\partial t}=\frac{\rho\boldsymbol{u}}{c},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=0.$$

ここで curl $\boldsymbol{E}$. curl $\boldsymbol{H}$ はそれぞれテンソル $\operatorname{curl}_{\iota\kappa}\boldsymbol{E}$ および $\operatorname{curl}_{\iota\kappa}\boldsymbol{H}$ に対隅なベクトルである．変形しない準拠系では γ は時間に依存しないから，これらの式は物質中の現象論的な Maxwell の方程式と同型である．(72) は

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{78a}$$

$$\epsilon=\mu=\frac{1}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}} \tag{78b}$$

と書けるから，重力は空間幾何学に影響を与えるほかに，誘電率と導磁率が (78 b) で与えられるような媒質の働きをすることがわかる．

116. 電磁力およびエネルギー・運動量テンソル

(V. 85) によれば荷電が e の粒子に作用する4元電磁力は

$$F_i=\frac{e}{c}F_{ik}U^k \tag{79}$$

である．このベクトルの成分は，(2) と (73) により

$$F_i=\frac{e}{c}(F_{\iota\kappa}U^\kappa+F_{\iota\kappa}U^4,\ F_{4\kappa}U^\kappa)=e\Gamma\left(E_\iota+\frac{B_{\iota\kappa}u^\kappa}{c},\ -\frac{E_\kappa u^\kappa}{c}\right).$$

と書ける．(28) と比べると，運動する荷電粒子に作用する電磁力は

$$\mathfrak{F}_\iota=e\left(E_\iota+\frac{B_{\iota\kappa}u^\kappa}{c}\right) \tag{80}$$

であることがわかる．これは，(76) で定義した軸性ベクトル $\boldsymbol{B}$ を用いて

$$\mathfrak{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}\right) \tag{81}$$

と書くことができる．ここで $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ はその共変成分が

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})_\iota=\sqrt{\gamma}(u^2B^3-u^3B^2,u^3B^1-u^1B^3,u^1B^2-u^2B^1) \tag{81'}$$

で与えられるようなベクトル積である (附録5参照).

荷電が連続的に分布している系では体積要素 dV 内の荷電に作用する力は (81) に $e=\rho dV$ を代入したもので与えられる．したがって力の**密度** $\boldsymbol{f}$ は

$$\boldsymbol{f}=\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}\right) \tag{82}$$

でなければならない．これは物質中で Minkowski のエネルギー・運動量テンソルからえられる力 (VII. 73) の式と形が同じである．

4元的な力の密度として，(V. 93) から

$$f_i=F_{ik}s^k \tag{83}$$

がえられる．これはさらに (68) と (73) により

$$f_i=\left(\frac{\rho(E_\iota+B_{\iota\kappa}u^\kappa/c)}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}},\ -\frac{\rho(E_\kappa u^\kappa)}{c\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\right) \tag{84}$$

となる．ゆえに

$$f_i=\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}},\ -\frac{(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})}{c\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\right) \tag{85}$$

は重力場がある場合についての (IV. 214) を一般化した式である．

(V. 96) によれば，一般の系 S で，運動方程式は，

$$\overset{0}{\mu}{}^0\frac{DU_i}{d\tau}=f_i \tag{86}$$

となる．このような型の力では固有質量 $\overset{0}{\mu}{}^0 d\overset{0}{V}{}^0$ が保存されるから，この式に荷電物質の小片の固有体積 dV^0 をかけて，(55) を用れば

$$\frac{DP_i}{d\tau}=f_i d\overset{0}{V}{}^0=f_i dV\Gamma\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)} \tag{87}$$

がえられる．$P_i=\overset{0}{\mu}{}^0 d\overset{0}{V}{}^0 U_i$ は，この小粒子の 4 元運動量である．(85) と (14) から，これらの式はまた，(29) と (30) に似た形，

$$\frac{d_c p}{dt}=K+f dV,\qquad \frac{dH}{dt}=f_\iota dVu^\iota \tag{88}$$

と書くことができる．

この第 1 の式は重力 $\boldsymbol{K}$ と電磁力 $\boldsymbol{f}dV$ を受けている物質の小部分の運動方程式，第 2 式は，エネルギーの保存則を表わす．

(V. 105, 106) が局所慣性系で成り立つことから，一般系では

$$f_i=-\mathrm{div}_i\{S_i^k\}\equiv S^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}(|g|S_i^k)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}S^{kl}, \tag{89}$$

がえられる．ここで

$$S_i^k=\dot{S}_{i\cdot}^{\ k}=S^k_{\cdot i}=F_{il}F^{kl}-\delta_i^k\frac{1}{4}(F_{lm}F^{lm}) \tag{90}$$

は，電磁エネルギー・運動量テンソルである．(89) 式は，(83) と場の方程式 (58) からえられる結果である．

(71), (73) および (76) を (90) に代入すれば，テンソル S_i^k の成分として

$$S_\iota^\kappa=-\frac{t_\iota^\kappa}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}},\quad t_\iota^\kappa=H_\iota B^\kappa+E_\iota D^\kappa-\delta_\iota^\kappa\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{91 a}$$

$$S_4^\iota=-\frac{(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})^\iota}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}},\quad S_4^4=-\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}} \tag{91 b}$$

$$S_\iota^4 = \frac{(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})_\iota}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}} \tag{91 c}$$

をえる．ここで $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$ は (81′)，或は附録5の (5) および (6) 式で定義したベクトル積である．

(45), (47) および (91) から，電磁エネルギーの流れ，エネルギー密度および運動量密度として，

$$\boldsymbol{S} = c(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \qquad h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{92}$$

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) \tag{93}$$

がえられる．これらの式は，物質中での Minkowski のエネルギー・運動量テンソル (VII. 68) からえられる式と完全に一致する．これは (93) の代りに $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})/c$ がえられる Abraham のテンソルとは明らかにに異なる．

117. 静的な重力場内における光の伝播．Femat の原理

$\gamma_\iota=0$ で $\gamma_{\iota\kappa}$ や χ が時間変数に依存しない静的な重力場の中では，電磁場の方程式 (77) は

$$\epsilon = \mu = \frac{1}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}$$

の静止媒質中における Maxwell の現象論的方程式と同じ型になる．空間の十分小さな部分については，空間幾何学は Euclid 的であると見なしてもよいから，これらの式から波長が十分短かい近似，すなわち幾何光学の近似では，光は

$$w = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{(\epsilon\mu)}} = c\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)} \tag{94}$$

という速さで伝播することになる．そして，これは，(VIII. 70) 式に一致する．静的な重力場内における光線の進路は，屈折率が一様でない屈折性物体中の場合と同様な方法，すなわち Fermat の原理 (§10 参照) によって定まる．Fermat の原理によれば光が空間の2点 A, B 間を通過するのに要する時間はこれが実際に通る経路の場合に極小となる．数学的には，これは A と B を結ぶあらゆる曲線の変化に対する変分原理

$$\delta\int_A^B \frac{d\sigma}{w} = \delta\int_A^B \frac{d\sigma}{c\sqrt{(1+2\chi/c^2)}} = 0 \tag{95}$$

で表わされる．この場合，$\gamma_{\iota\kappa}=g_{\iota\kappa}$ であるから，(95) は

$$\delta\int L(x^\iota, \dot{x}^\iota)\,d\lambda = 0, \tag{96}$$

ただし,

$$L(x^\iota, \dot x^\iota)=\frac{\sqrt{(g_{\iota\kappa}\dot x^\iota \dot x^\kappa)}}{w(x^\iota)}, \qquad \dot x^\iota=\frac{dx^\iota}{d\lambda} \tag{97}$$

と書くことができる. ここでλは, いま考えている曲線のパラメーター表示 $x^\iota=x^\iota(\lambda)$ に現われる任意のパラメーターである. §86 の (21), (24) 式によれば, (96) なる条件は, Euler の式

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\iota\kappa}\dot x^\kappa}{w\sqrt{(g_{\kappa\lambda}\dot x^\kappa \dot x^\lambda)}}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{(\partial g_{\kappa\lambda}/\partial x^\iota)\dot x^\kappa \dot x^\lambda}{w\sqrt{(g_{\kappa\lambda}\dot x^\kappa \dot x^\lambda)}}-\frac{\sqrt{(g_{\kappa\lambda}\dot x^\kappa \dot x^\lambda)}}{w^2}\,\frac{\partial w}{\partial x^\iota} \tag{98}$$

と同等である. パラメーターλは全く勝手であるから, (98) によって定まる曲線に沿って

$$w\sqrt{(g_{\kappa\lambda}\dot x^\kappa \dot x^\lambda)}=\frac{d\sigma}{d\lambda}w=一定=1 \tag{99}$$

であるように選んでよい. このときには, これらの方程式は

$$\frac{d_C u_\iota}{d\lambda}\equiv\frac{d}{d\lambda}(g_{\iota\kappa}\dot x^\kappa)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{x^\iota}\dot x^\kappa \dot x^\lambda=-\frac{1}{w^3}\,\frac{\partial w}{\partial x^\iota}=-\frac{1}{w^4}\,\frac{\partial \chi}{\partial x^\iota} \tag{100}$$

となる. これと (99) とで, 光線の進路が完全に定まる. 右辺の $-\frac{1}{w^4}\mathrm{grad}\,\chi$ という項により光線が最も真直な線からずれることになる. (17) によれば, この項は $(1/w^4)\boldsymbol{G}$ に等しい. ここで $\boldsymbol{G}$ は単位質量に作用する重力である. したがって光線が'最も真直な'線であるのは重力 $\boldsymbol{K}$ が零である場合に限ることになる.

これと同じ結果は光線の世界線の方程式 (VIII. 87) からもえられる†. $\gamma_\iota=0$, $w=c\sqrt{(-g_{44})}$ があるから, (VIII. 87) の最後の式は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2-w^2\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2=0 \tag{101}$$

と書ける. さらに静的な重力場の場合には最初の式で $i=4$ とした場合から

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{w^2}{c^2}\,\frac{dx^4}{d\lambda}\right)=0$$

をえる. これは, 世界線にそって $w^2\dot t=一定$ であることを示している.

λを適当に選べば, この定数を1にすることができる. ゆえに

$$w^2\dot t=1 \tag{102}$$

で, (101) によれば

† T. Levi-Civita, *Rend. Accad. Lincei* (5), No. 26 (1917) p. 458: *Nuovo Cimento* (6), **16**, 105 (1918): H. Weyl, *Ann. d. Phys.* **54**, 117 (1917)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 w^2=1$$

となる．これは，(102) で定義したパラメーター λ が (99) で定義したものと一致することを表わしている．$i=1, 2, 3$ の場合，(VIII. 87) から，

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{\iota\kappa}\dot{x}^{\kappa})=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\iota}}\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial x^{\iota}}\dot{t}^2$$

がえられる．この式は(102)によって(100)と同等である．したがって，Fermat の原理は，任意の重力場内で成り立つ．

第 XI 章

一般相対性理論における重力の基本法則

118. 重力場の方程式

前節では物理現象に対する重力場の影響について考察した．今度は重力理論中最も重要な問題，すなわち質量の分布を与えたとき，重力場の変数 ($\gamma_{\iota\kappa}, \gamma_{\iota}, \chi$) あるいは g_{ik} を決定する一般的な方程式を見出すことを試みよう．2, 3 先行する試みはあったが，1915 年 Einstein† によってこの問題に最終的な解決が与えられた．Newton の重力論では，この問題は Poisson の方程式

$$\Delta\chi = 4\pi k\overset{0}{\mu} \tag{1}$$

の形で与えられている．ここで

$$k = 6.664\times10^{-8}\mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{gm}^{-1}\cdot\mathrm{sec}^{-2}. \tag{2}$$

は万有引力定数である．質量 $\overset{0}{\mu}$ が空間座標の函数として与えられている場合には，この式によって重力ポテンシャル χ を計算することができる．

質量とエネルギーの同等性により，エネルギー分布，例えば電磁場もまた重力場を作り出すことになろう．任意の系のエネルギー密度は，この系のエネルギー・運動量テンソル T_{ik} の成分 T_{44} で与えられ，$\chi = \frac{1}{2}c^2(-1-g_{44})$ は計量テンソルの成分 g_{44} に関係する．したがって方程式 (1) はある 2 階の微分演算子が g_{44} に作用したものが T_{44} に比例することを表わしている．さて，一般的な場の方程式は共変的でなければならない．ところが座標変換によって，T_{ik} の成分は混り合ってしまう．したがって一般的な重力場の場の方程式は

$$M_{ik} = -\kappa\cdot T_{ik} \tag{3}$$

という形であると仮定するのが自然である．ここで κ は自然定数，M_{ik} は 2 階のテンソルで計量テンソル g_{ik} ならびにその 1 階および 2 階の微分だけによる量である．場が弱い場合には (3) 式はPoisson の式に一致しなければならぬから，M_{ik} は g_{ik} の 2 階の微分に関して 2 次式でなければならない．そして，そのような M_{ik} として唯一の可能な形は

$$M_{ik} \equiv R_{ik} + c_1 R\cdot g_{ik} + c_2 g_{ik} \tag{4}$$

である．ここで c_1 および c_2 は定数，R_{ik} および R は (IX. 111, 114) で定義

† A. Einstein, *Berl. Ber.*, p. p. 778, 799, 844 (1915): *Ann. d. Phys*, 49, 769 (1916)

した Riemann-Christoffel の曲率テンソルの縮約形である．

(4) 式に現われるテンソルの対称性により (3) 式は 10 個の函数 g_{ik} に関する 10 個の微分方程式となる．ところが，簡単な考察からわかるように，これら 10 個の方程式は互に独立ではありえない (Hilbert†)．例えば特に物質が存在しない場合について考えることにすれば，$T_{ik}=0$ で，(3) 式は

$$M_{ik}=0 \tag{5}$$

となる．もしこれらの式が互に独立であるならば，これら 10 個の方程式 (5) は，特定の座標系 (x^i) で，ある超曲面

$$x^4=\text{一定}=a \tag{6}$$

の上で g_{ik} および $\partial g_{ik}/\partial x^l$ の値を与えた場合，全 4元空間内で函数 $g_{ik}(x^l)$ を一意的に決定するはずである．

そこで，

$$x'^i=x'^i(x), \qquad x^i=x^i(x') \tag{7}$$

によって新しい座標系 x'^i を導入すれば，変換された函数

$$g'_{ik}=\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}g_{lm} \tag{8}$$

は，1 組の微分方程式

$$M'_{ik}=0 \tag{9}$$

を満足するはずである．M'_{ik} は，方程式 (5) の共変性により，M_{ik} が g_{ik}, $\partial g_{ik}/\partial x^l$, $\partial^2 g_{ik}/\partial x^l\partial x^m$ の函数であるのと同型で，g'_{ik}, $\partial g'_{ik}/\partial x'^l$, $\partial^2 g'_{ik}/\partial x'^l\partial x'^m$ の函数である．したがって，以前と同じ議論により，(9) 式も，超曲面 $x^4=x^4(x')=a$ 上で g'_{ik} および $\partial g'_{ik}/\partial x'^l$ の値を与えた場合，$g'_{ik}(x')$ を定めるはずである．そして，もし，表面 $x^4=a$ の近所で $x'^i=x^i$ であるが，その他の場所では任意であるように変換を選べば，この面上では

$$g'_{ik}=g_{ik}, \qquad \frac{\partial g'_{ik}}{\partial x'^l}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$$

となる．したがって (x'^l) の函数 $g'_{ik}(x'^l)$ は，(x^l) の函数 $g_{ik}(x^l)$ と同じ函数でなければならないことになる．ところが，このことは，(8) と矛盾する．(8) は，$x^4=a$ より遠く離れた処では一般に (x'^l) の函数としての g'_{ik} と，(x^l) の函数としての g_{ik} と函数形が異なることを示している．

このように場の方程式が共変であるためには，(5) および (3) の左辺の M_{ik} という量が 4 つの恒等式を満足するものと仮定しなければならない．なぜならば変換 (7) には 4 つの任意の函数が現われるが，これはわれわれの時空の記述

† D. Hilbert, *Gött. Nachr.*, p. 395 (1915)

の仕方を変えるだけで，重力場を生ぜしめる物理系を変えるものではない．これに対応して場の方程式の解 g_{ik} も 4 つの任意函数が含まれなければならぬからである．§113 で知ったように，時空座標を適当に選ぶことによって，時空全体を通じて，4 つの函数 g_{i4} が $-\delta_{i4}$ なる値をとるようにすることが常に可能である．そしてこのとき M_{ik} に関する 4 つの恒等式を導入した後に残る 6 つの独立な方程式は，計量テンソルの残りの 6 つの成分を決めるのに十分である．

§114 で示したように，一般座標系では，エネルギーおよび運動量の保存の定理は

$$T^k_{i;k}=\mathrm{div}_i\{T^k_i\}=0 \tag{10}$$

という形をとる．したがって，テンソル M_{ik} の成分に関する 4 つの恒等式が

$$M^k_{i;k}\equiv 0 \tag{11}$$

であると仮定すれば，物質系に対する保存定理は場の方程式 (3) の結果としてえられる．このことは荷電の保存 (X. 60) が Maxwell の方程式 (X. 58) からえられるのと同じである．

そこで，場の方程式の左辺に現われる微分演算子 M_{ik} は 4 つの恒等式 (11) を満足するものと仮定する．(IX. 86) および (IX. 112) によれば，(4) から

$$M^k_{i;k}=\left(\frac{1}{2}+c_1\right)(Rg^k_i)_{;k}$$

をえる．これが恒等的に零に等しくなるためには

$$c_1=-\frac{1}{2}$$

でなければならない．したがって λ を普遍定数として，$c_2=-\lambda$ とおけば

$$M_{ik}\equiv R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}-\lambda g_{ik} \tag{4$'$}$$

がえられる．そして場の方程式 (3) は

$$M_{ik}\equiv R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}-\lambda g_{ik}=-\kappa T_{ik} \tag{12}$$

となる．このテンソル方程式を混合成分で書けば

$$M^k_i\equiv R^k_i-\frac{1}{2}R\delta^k_i-\lambda\delta^k_i=-\kappa T^k_i \tag{13}$$

となる．これを縮約すれば，$R^i_i=R$, $\delta^i_i=4$ であるから

$$R+4\lambda=\kappa T, \tag{14}$$

ただし，

$$T=T^i_i \tag{15}$$

をえる．ここで T はエネルギー・運動量テンソルを縮約してえられる不変量である．(14) を用いて R を消去すれば，場の方程式 (12) は

$$R_{ik}+\lambda g_{ik}=-\kappa\left(T_{ik}-\frac{1}{2}Tg_{ik}\right) \tag{16}$$

という形に書ける．

119. 弱い場の線型近似

場の方程式 (12) および (16) は函数 g_{ik} に関して，一般に**非線型**偏微分方程式である．しかし，重力場が弱い場合には，これらの場の方程式は近似的に1組の線型微分方程式で置きかえることができる†．弱い場というのは，計量テンソルが

$$g_{ik}=G_{ik}+h_{ik} \tag{17}$$

の形になるような時空座標系を導入することができることである．ただし G_{ik} は特殊相対論の場合の，定数の計量テンソル (VIII. 41) であり，h_{ik} およびその微分は小さな量で，その2乗が無視できるようなものであるとする．そのときは，Christoffel の記号 (IX. 50) は1位の無限小となり，曲率テンソル (IX. 99, 114) で，Christoffel 記号の2乗を含む項は無視することができる．したがって

$$\begin{aligned}R_{ik}&=\frac{\partial\Gamma^r_{ir}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial x^r}\\&=\frac{G^{rs}}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial h_{si}}{\partial x^r}+\frac{\partial h_{sr}}{\partial x^i}-\frac{\partial h_{ir}}{\partial x^s}\right)\\&\quad-\frac{G^{rs}}{2}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial h_{si}}{\partial x^k}+\frac{\partial h_{sk}}{\partial x^i}-\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^s}\right)\\&=\frac{G^{rs}}{2}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^r\partial x^s}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 h^r_i}{\partial x^r\partial x^k}-\frac{\partial^2 h^r_k}{\partial x^i\partial x^r}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

をえる．ここで

$$h^r_i=G^{rs}h_{is},\qquad h=h^r_r=G^{rs}h_{rs} \tag{19}$$

とおいた．

まず物質の分布が静的である場合を考えよう．静的な物質分布というのは，(17) のような型の時空座標系のうち，場の変数 h_{ik} および物質のエネルギー・運動量テンソルの成分が時間 t に無関係になるような時空座標系がある場合のことである．そのときは，R_{44} なる成分に対して，(18) から

$$R_{44}=\frac{G^{\iota\kappa}}{2}\frac{\partial^2 h_{44}}{\partial x^\iota\partial x^\kappa}=-\frac{\Delta\chi}{c^2} \tag{20}$$

をえる．ここで χ は (VIII. 94) で定義されるスカラー・重力ポテンシャルで Δ

---

† A. Einstein, *Berl. Ber.*, p. 688 (1916)

は Laplace の演算子である．静止している物質中で，弾性の応力がエネルギー・運動量テンソルに与える小さな寄与を無視すれば，第1近似で

$$\left.\begin{aligned} &T_{ik}=G_{il}G_{km}\overset{\circ}{\mu}{}^{0}U^{l}U^{m}=\delta_{i4}\delta_{k4}\overset{\circ}{\mu}{}^{0}c^{2}\\ &T=T_{i}^{i}=\overset{\circ}{\mu}{}^{0}U_{i}U^{i}=-\overset{\circ}{\mu}{}^{0}c^{2}\\ &T_{44}-\frac{1}{2}G_{44}T=\frac{1}{2}\overset{\circ}{\mu}{}^{0}c^{2} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

がえられる．よって (16) で $i=k=4$ とおいて

$$\Delta\chi-\lambda c^{2}g_{44}=\frac{\kappa c^{4}}{2}\overset{\circ}{\mu}{}^{0} \tag{22}$$

が成立する．さて，太陽系内ではあらゆる静的，または準静的重力場に対して Poisson の方程式 (1) がよい近似であることがわかっている．それで太陽系内のあらゆる重力現象に対しては，λ の項を無視してよいほど λ の値が小さいものと考えられる．λ 項が大切なのは宇宙論的な問題の場合だけである．したがってその他の場合には λ を零とおくことにする．そのときは場の方程式 (12)は

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=-\kappa T_{ik} \tag{23}$$

となる．さらに，(22) と (1) を比べれば定数 κ が万有引力定数 h と次の式で結ばれていることがわかる．

$$\kappa c^{2}=\frac{8\pi k}{c^{2}}=1.87\times10^{-27}\mathrm{cm.\,gm^{-1}}. \tag{24}$$

さてふたたび一般の弱い場の場合に戻ることにしよう．まず h_{ik} が1位の微小量になるような (17) の形の座標系というものには，まだ大幅に任意性が残されていることに注意する．$\delta x^{i}(x^{l})$ を1位の微小量として，

$$x'^{i}=x^{i}+\delta x^{i} \tag{25}$$

なる型の変換を行っても，変換でえられた計量テンソルは，やはり (17) と同じ形になる．(23) の左辺は1位の微小量であるから，κT_{ik} もまた1位の微小量である．このことは，今考えている近似の範囲内で Γ_{ik} が変換 (25) に対して不変量のように取り扱ってよいことを意味している．したがって，T_{ik} の成分は局所慣性系における値に等しいと置いてよいことになる．

R_{ik} を表わす式 (18) は

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\Box h_{ik}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{i}}\frac{\partial\chi_{k}^{l}}{\partial x^{l}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\frac{\partial\chi_{i}^{l}}{\partial x^{l}} \tag{26}$$

ただし，

$$\chi_{i}^{k}=h_{i}^{k}-\frac{1}{2}\delta_{i}^{k}h,\qquad \chi_{ik}=h_{ik}-\frac{1}{2}G_{ik}h,\qquad h=h_{l}^{l} \tag{27}$$

と書くことができる. χ_{ik}, χ_i^k という量は, 時空座標の1次変換に対して, テンソルの成分のように変換される. ところが一方, (25) のような型の変換で χ_i^k が

$$\frac{\partial \chi_i^k}{\partial x^k}=0 \tag{28}$$

を満たすようにすることが常に可能である†. したがって, R_{ik} および R は

$$R_i=\frac{1}{2}\Box h_i, \qquad R=R_i^i=\frac{1}{2}\Box h \tag{29}$$

となり, 場の方程式 (23) は

$$\Box \chi_{ik}=-2\kappa T_{ik} \tag{30}$$

になる. この式は, 電磁ポテンシャルの式 (V. 26) と同じ形をしている. したがって無限の遠方で零になる (30) の解のうち遅滞ポテンシャル (V. 46) に相当するものは

$$\chi_{ik}(x^i, t)=\frac{2\kappa}{4\pi}\int\frac{T_{ik}(x'^i, t-r/c)}{r}dx'^1dx'^2dx'^2 \tag{31}$$

となる. ここで $r=\sqrt{\{\sum_{i=1,2,3}(x^i-x'^i)^2\}}$ である. 解 (31) が本当に方程式 (28) を満足することの証明は, 遅滞電磁ポテンシャルに対して Lorentz 条件が成り立つことの証明と全く同じように行うことができる. 後者の証明は, 荷電の保存則 (V. 41 参照) に基いて行われたが, この場合, (28) が成り立つことの証明はエネルギーおよび運動量の保存則から同様な方法でなされる. いま考えている近似では, エネルギーおよび運動量の保存は

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}=0 \tag{32}$$

と書くことができる. 次のようにして(31) から h_{ik} について陽表的な式を求めることができる. まず (27) から,

$$\chi_l^l=h_l^l-2h=-h, \qquad h_{ik}=\chi_{ik}+\frac{1}{2}G_{ik}h=\chi_{ik}-\frac{1}{2}G_{ik}\chi_l^l \tag{33}$$

をえる. したがって, (31) から,

$$\chi_l^l=\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T'dV'}{r}$$

および

$$h_{ik}=\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T'_{ik}-\frac{1}{2}G_{ik}T'}{r}dV' \tag{34}$$

---

† D. Hilbert, *Göt. Nachr*, p. 53 (1917) と (28) 式を満足する解 (31) を見よ.

がえられる．ここで，T'_{ik} および T' のダッシュは体積要素 $dV'=dx'^1dx'^2dx'^3$ のある場所 (x'^ι) で時刻 $t-r/c$ における値をとるべきことを表わした記号である．

120. 弱い場に対する線型近似の簡単な応用．遠心力および Coriolis の力の相対性

まず質量密度 $\mu^0=\mu^0(x, y, z)$ が空間座標 $x^\iota=(x, y, z)$ の与えられた函数であるような**静的な**物質分布の場合について考えよう．(21) および (34) によればこの場合には，

$$
\left.\begin{aligned}
&T_{ik}=\delta_{i4}\delta_{k4}\cdot\mu^0c^2, \qquad T=-\mu^0c^2\\
&h_{44}=\frac{\kappa c^2}{4\pi}\int\frac{\mu^0(x', y', z')dx'dy'dz'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|},\\
&h_{\iota 4}=0\\
&h_{\iota\kappa}=\frac{\kappa c^2}{4\pi}\int\frac{\mu^0(x', y', z')dx'dy'dz'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\delta_{\iota\kappa}=h_{44}\delta_{\iota\kappa}
\end{aligned}\right\} \tag{35}
$$

となり，重力ポテンシャルは (24) により，普通の Newton の理論の結果に等しい式

$$
\chi=-\frac{c^2}{2}h_{44}=-k\int\frac{\mu^0(\boldsymbol{x}')dV'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{36}
$$

となる．したがって，線素は

$$
\begin{aligned}
ds^2&=(G_{ik}+h_{ik})dx^idx^k\\
&=\left(1-\frac{2\chi}{c^2}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)-\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)c^2dt^2
\end{aligned} \tag{37}
$$

という形になる．ここで χ は (36) で与えられている．

空間部分の線素は

$$
d\sigma^2=\left(1-\frac{2\chi}{c^2}\right)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{38}
$$

であるから，その幾何学は近似的にしか Euclid 的でない．座標 x, y, z も厳密には直交座標ではない．この場合空間座標を変えるだけで直交座標系を導入することは，一般には不可能である．しかし多くの場合，その Euclid 幾何との差は測定にかからないほど小さい．例えば地球の表面では，$2\chi/c^2$ なる量は 10^{-9} 程度である．

質量が $M_1^0, M_2^0, \cdots\cdots$ なる質点がそれぞれ $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots\cdots$ なる場所に存在す

るときは，(36) から

$$\chi(\boldsymbol{x})=-k\left(\frac{M_1^0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_1|}+\frac{M_2^0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_2|}+\cdots\cdots\right) \tag{39}$$

がえられる．

1 個の質点がある場合には，線素は球対称で

$$\left.\begin{aligned} ds^2&=\left(1+\frac{2kM^0}{c^2r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)\\ &\quad-\left(1-\frac{2kM^0}{c^2r}\right)c^2dt^2\\ \text{ただし}\quad r&=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}| \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

となる．

全く同様にして，物質の流れが定常的に分布する場合をも Einstein の近似式 (34) で取り扱うことができる．例えば Thirring と Lense† は中心にある天体の回転がその重力場に及ぼす影響およびこの影響の結果がさらに衛星の運動に及ぼす影響を計算したが，そのような影響は観測にはかからないほど小さかった‡．したがって，ここではこれについては考えないことにする．

この種の効果自身は非常に小さいけれども，理論的に云って重要な場合が 1 つ存在する．それは廻転系 S 中に現われる遠心力や Coriolis の力の本性や起源について新しい観点を与えることである．一般相対性原理（§ 82 参照）の基底となっている Einstein のアイディアによれば，これらの力は，遠方にある天体の質量が S 系に対して廻転していることによって生ずる重力であり，このような‘非永久的’重力場も永久重力場と同じ一般の場の方程式を満足すべきものなのである．遠方にある天体の質量の効果を，直接弱い場に対する近似解 (34) を用いて取り扱うことは許されないが，一様な質量密度の球殻が廻転しているとき，球殻の内部には，遠方の天体の質量の廻転と類似の効果が現われるであろうと考えられる．

この球殻が静止しているときは，(36) で与えられるポテンシャルはこの球殻内では一定で $\chi=-kM_0/R$，すなわち

$$\frac{2\chi}{c^2}=-\frac{\kappa c^2}{4\pi}\frac{M_0}{R} \tag{41}$$

となる．ここで M_0 は球殻の全質量，R はその半径である．

$1-2\chi/c^2$ および $1+2\chi/c^2$ なる係数があっても，この場合にはこれらは定数であるから，時空座標のスケールをかえるだけで除去することができる．した

† H. Thirring and J. Lense. *Phys. ZS.* **19**, 156 (1918)

‡ De Sitter, *Monthly Notices*, **76**, 699 (1919). **77**, 155 (1916)

がって線素 (37) は，球殻内では特殊相対論の場合と同じになる．球殻が等速度運動をしている場合には Lorentz 変換で静止の場合に帰着するから，球殻内の線素はやはり特殊相対論の場合と同じになる．このことは，物質が等速直線運動をしている場合の T_{ik} 式を用いて (34) から直接知ることもできる．この事実は慣性系に対して遠方の天体質量が一様な直線運動をしていても，これらは慣性系内に重力場を作らないことを示している．

ところが，Thirring§ は球殻状の物質が回転している場合，(30) 式で計算した球殻内の重力場が回転している座標系内の力場に似ていて，普通の遠心力や Coriolis の力に似た重力場を作り出すという面白い結果を発見した．ここではこれを少し簡単化した場合について考えることにしよう．それは静止質量が M_0，半径 R の環状物質が xy 面内で時計の針と同じ方向に角速度 ω で回転している場合である．環上の1点の座標を $(x', y', 0)$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}
&R^2=x'^2+y'^2,\\
&T_{\iota\kappa}=T^{\iota\kappa}=\frac{\mu^0u^\iota u^\kappa}{1-R^2\omega^2/c^2}\\
&T_{\iota4}=T_{4\iota}=-T^{\iota4}=-\frac{\mu^0u^\iota c}{1-R^2\omega^2/c^2}\\
&T_{44}=T^{44}=\frac{\mu^0c^2}{1-R^2\omega^2/c^2}\\
&T=T^i_i=T_{\iota\iota}-T_{44}=-\mu^0c^2\\
&u^\iota=\omega(y', -x', 0)
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

となる．

(IV. 198) から，環の全静止質量 M_0 として

$$M_0=\int\mu_0dV=\frac{1}{\sqrt{(1-R^2\omega^2/c^2)}}\int\mu^0dV$$

がえられる．ゆえに (34) により

$$h_{ik}(x, y, z)=C\int\frac{t'_{ik}ds}{\rho} \tag{43}$$

である．ただし，

$$\rho=\sqrt{\{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\}} \tag{44}$$

は，環上の線素 ds と点 (x, y, z) の間の距離である．また

$$C=\frac{M_0\kappa c^2}{4\pi^2R\sqrt{(1-R^2\omega^2/c^2)}} \tag{45}$$

であり，

§ H. Thirring, *Phys. ZS.* **19**, 33 (1918)：**22**, 29 (1921)

$$t'_{ik}=\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2}y'^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{R^2\omega^2}{c^2} & -\frac{x'y'}{c^2}\omega^2 & 0 & -\frac{\omega y'}{c} \\ -\frac{y'x'}{c^2}\omega^2 & \frac{\omega^2}{c^2}x'^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{R^2\omega^2}{c^2} & 0 & \frac{\omega x'}{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{R^2\omega^2}{c^2} & 0 \\ -\frac{\omega y'}{c} & \frac{\omega x'}{c} & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{R^2\omega^2}{c^2} \end{pmatrix} \tag{45'}$$

である.

さてRに比べて原点からの距離が小さいような点 (x, y, z) のみについて考えることにしよう. このことは, $\frac{1}{\rho}$ を x/R, y/R, z/R について展開してもよいことを意味する. これらの量に関して2次以上の項を無視すれば

$$x'=R\cos\vartheta' \qquad y'=R\sin\vartheta'$$

とおいて

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}+\frac{x}{R}\cos\vartheta'+\frac{y}{R}\sin\vartheta' +\frac{3}{2}\frac{x^2}{R^2}\cos^2\vartheta'+\frac{3}{2}\frac{y^2}{R^2}\sin^2\vartheta'+\frac{3}{2}\frac{xy}{R^2}\sin 2\vartheta'\Big) \tag{46}$$

をえる. この式および $ds=Rd\vartheta'$ を (43) に代入すれば, ϑ' について0から 2π まで行う積分は容易に実行できる. このようにしてえられた結果のうち力学的ポテンシャルを決める成分 $g_{i4}=G_{i4}+h_{i4}$ だけを書き下せば

$$\left.\begin{aligned} g_{14}&=-\frac{C\pi\omega}{c}y=\frac{M\kappa c^2}{4\pi R}\Big(-\frac{\omega y}{c}\Big) \\ g_{24}&=\frac{M\kappa c^2}{4\pi R}\frac{\omega x}{c} \\ g_{34}&=0 \\ g_{44}&=-1+\frac{M\kappa c^2}{4\pi R}\Big(1+\frac{x^2+y^2-2z^2}{4R^2}+\frac{R^2\omega^2}{c^2}\Big) \\ &\quad+\frac{M\kappa c^2}{16\pi R}\frac{\omega^2}{c^2}(x^2+y^2-2z^2) \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

となる. ここで　$M=M_0(1-R^2\omega^2/c^2)^{-1/2}$

はこの球殻の相対論的質量である. これらの式は $R\omega/c<1$ なるあらゆるωについて成り立つ. ここで用いた近似は, 弱い場の方程式を用いたことと $1/\rho$ を x/R, y/R, z/R について展開したことだけである.

同様にして質量が M の静止している環については

$$g_{44}=\left[-1+\frac{M\kappa c^2}{4\pi R}\left(1+\frac{x^2+y^2-2z^2}{4R^2}\right)\right]\delta_{44}$$

がえられる．この場合，閉じた殻内部ではスカラー・ポテンシャルは一定でない．ゆえに g_{44} 中のあまり重要でない定数項

$$\frac{M\kappa c^2}{4\pi R}\frac{R^2\omega^2}{c^2}$$

を別にすれば，環の廻転による力学ポテンシャルは，

$$\left.\begin{aligned}\gamma_\iota&=\frac{M\kappa c^2}{4\pi R}\frac{\omega}{c}(-y,x,0)\\ \chi&=-\frac{M\kappa c^2}{16\pi R}\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2-2z^2)\end{aligned}\right\}\qquad(48)$$

となる．(X. 18′) と比べてみればわかるように，xy 面内で時計の針と同じ方向に回転する重い環の内部にあって運動する試験体に作用する重力は，時計の針と反対の方向に回転する座標系内における重力と同じ型である．$M\kappa c^2/4\pi R$ という量が小さいために，この影響は小さすぎて測定はできない．そしてこのことは Friedländer† が実際に行った実験の結果が否定的であったことの説明になる．しかし遠心力や Coriolis の力が遠方の質量の回転によるものであるという考え方からすれば，万有引力定数 κ，宇宙の全質量 M および天体の質量分布の平均半径 R の間に

$$\frac{M\kappa c^2}{4\pi R}\approx 1\qquad(49)$$

という型の関係が成り立つであろうことが示唆されるのである．

廻転している環の中の重力場と角速度の関係が回転系内の重力場と全く同じであるということは興味深いことである．(48) で Coriolis の力を与えるベクトル・ポテンシャル γ_ι も座標 (x,y,z) の函数として普通の場合と同じ形をしている．ところが，(48) のスカラー・ポテンシャルには x^2+y^2 による普通の項のほかに z^2 による項を含んでいる．この項は‘遠心力’に軸方向の成分を与えることになり，これは試験体を回転する環の平面の方へ引きもどす働きをすることになる．このように普通の遠心力とちがう予期しなかった力が現われたのは，われわれが考えている質量分布が特殊なためであろうと考えるかも知れないが，Thirring の計算によれば回転する一様な環殻の内部にも，同様な項が現われるのである．したがって普通遠心力が完全に動径の方向に向いているということは，むしろ，解を一義的にきめるためには無限の遠方における境界条件を陽表的に必要とするような近似的な場の方程式 (30) が，宇宙全体を記

† B. and T. Friedländer: *Absolute und relative Bewegung*, Berlin, 1896.

述するのに適しないことを示しているものと解されるのである．厳密な場の方程式 (12) は先ず第一に非線型であり，第二にそれは宇宙的な距離を問題にする場合に重要になる λ 項を含んでいる．事実，この項は場の方程式の特性，特にその境界条件（§132 参照）を全く変えてしまうのである．たとえ弱い場について線型近似を行ったとしても，λ 項を考慮すれば回転する環の場合に $-\lambda R^2$ なる係数を伴った (48) 中の項と同じ型の項が解の中にはいってくることが簡単な計算からわかる．そして，この場合には (x^2+y^2) を含む項と z^2 を含む項の比が (48) の場合と同じではない．したがって

$$\lambda R^2 \approx 1 \tag{50}$$

ならば，χ 中の z^2 を含む項が打消し合って遠心力が完全に動径方向に向うようになりうることが理解される．この考察は非常に粗っぽいものであることは云うまでもない．なぜならば上の線型方程式を宇宙全体について適用することは多分悪い近似であろうと考えられるからである．しかし，§133 でわかるように，Einstein† が理想化された宇宙の模型に厳密な重力方程式を適用してえた解からも (49) および (50) なる関係がえられるのである．

最後に，もし**非定常的**な物質分布の場合を (30) および (34) で取り扱えば，振動する物質が電磁力学における波動方程式の場合と全く同様にして，光と同じ速度で伝播し，それ自身エネルギーを運ぶ重力波を発生することがわかる．しかし，Einstein が示したように，このようにして放出される重力エネルギー（§123 参照）は十分小さいので天文学上に観測にかかるような効果をもたらさない．

121. 等価座標系．球対称な系

(x^i) を，計量テンソルが $g_{ik}=g_{ik}(x^l)$ であるような任意の座標系とする．さて，

$$x'^i = x'^i(x^l) \tag{51}$$

によって新しい座標系 x'^i を導入すれば，変換された計量テンソルの成分

$$g'_{ik}(x'^r) = \frac{\partial x^l}{x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{lm}(x^s) \tag{52}$$

は，一般に形が不変な座標の函数ではない．すなわち g'_{ik} は x'^l の函数としては，(x^l) の函数 g_{ik} と同じ形の函数ではない．

変換 (51) によって計量テンソルが時空座標の函数としてその形を変えないような場合，2 つの座標系 (x^i) と (x'^i) は等価であるという．なぜならば，この 2 つの座標系についてはいかなる物理現象も全く同じ展開の経過を示すこと

† A. Einstein, *Berl. Ber.*, p. 154 (1918)

になるからである．等価座標系が存在するということは重力場にある制限を課することになる．何となれば，このとき，次のような函数方程式が満足されなければならないからである．

$$g_{ik}(x'^{r}(x^{s}))=\frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{i}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{k}}g_{lm}(x^{s}). \tag{53}$$

場合によっては，重力場の変数 g_{ik} が 1 つの変換群全体に対してその形が不変である場合がある．例えば非永久的重力場はすべてそんな例である．何となれば先ず変換

$$X^{i}=f^{i}(x^{l}) \tag{54}$$

によって擬直交座標 X^{i} を導入すれば

$$ds^{2}=g_{ik}dx^{i}dx^{k}=G_{ik}dX^{i}dX^{k} \tag{55}$$

となる．さらに Lorentz 変換

$$X'^{i}=A^{i}_{k}X^{k} \tag{56}$$

を行い，次に前と同じ函数 f^{i} を用いた変換

$$X'^{i}=f^{i}(x'^{l}) \tag{57}$$

によって新しい時空座標系 (x'^{i}) を導入すれば

$$g_{ik}dx^{i}dx^{k}=G_{ik}dX^{i}dX^{k}=G'_{ik}dX'^{i}dX'^{k}=g'_{ik}dx'^{i}dx'^{k}$$

となる．

$$G'_{ik}=G_{ik}=\text{定数}$$

であるから，g'_{ik} は (x'^{l}) の函数としては，(x^{l}) の函数g_{ik}と同じ函数である．(54), (56) および (57) によって定義された変換 $x'^{i}=x'^{i}(x^{l})$ は**一般化された Lorentz 変換**と呼ばれ，2 つの等価な系を結びつけている．このように非永久的重力場の計量テンソルの成分 g_{ik} は一般化された Lorentz 変換群に対してその形を変えない．

永久重力場の場合には，4 次元的な直交変換群に対して g_{ik} の形が不変であるような時空座標 x^{i} を導入することは一般には不可能である．しかし，特に重要な場合であってしかも空間的直交変換という部分群に対して重力ポテンシャルが形を変えないような場合がある．このような場合を**球対称**であると呼ぶのが自然であろう．$x^{i}=(\boldsymbol{x}, ct)=(x, y, z, ct)$ とおけば，g_{ik} は，この場合 t を一定にしたまま 3 つの変数に直交変換を施してもその形が変らないのである．一般には (x, y, z) は直交系ではないし，その空間の幾何も一般に非 Euclid 的である．それにもかかわらずこの場合素 $ds^{2}=g_{ik}dx^{i}dx^{k}$ はよく知られた Euclid 空間における 3 次元回転群の不変量のみの函数なのである．これらの不変量としては，

$$\left.\begin{aligned} &r=\{x^2+y^2+z^2\}^{1/2},\ dr \\ &dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \\ &xdx+ydy+zdz=rdr,\ dt\ \text{および}\ t \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

などがある.

線素はこれらの微分量について 2 次形式であるから，球対称な系での ds^2 としては最も一般的に云って次のようなものになろう.

$$ds^2=F(r,t)dr^2+G(r,t)(r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2) \\ +2H(r,t)drdt+L(r,t)dt^2 \tag{59}$$

ここで，F, G, H, L は r と t のみの函数である. 座標を適当に選べばこの式はさらに簡単化できる. 変換

$$r'^2=r^2G(r,t) \tag{60}$$

によって，r の代りに r' を導入すればこの新しい変数に関して，線素 ds^2 は

$$ds^2=M(r',t)dr'^2+r'^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)+2N(r',t)dr't+O(r',t)dt^2 \tag{61}$$

となる.

(VIII. 110) で定義した $\omega_{\iota\kappa}$ なる量はこの場合明らかに零である. したがって座標時計の進み方を変えるだけでベクトル・ポテンシャルが現われないようにすることができる. $N(r',t)$ は θ, ϕ を含まないから，これは

$$t'=f(r',t) \tag{62}$$

という形の時間の変換だけで実行される. ダッシュを全部やめにしてしまえば線素は結局標準型

$$ds^2=adr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)-bc^2dt^2 \tag{63}$$

で表わされることになる. ここで

$$a=a(r,t), \qquad b=b(r,t)=1+\frac{2\chi}{c^2} \tag{64}$$

は r, t のみの函数で，(VIII, 52) によれば r, t のあらゆる値に対して正でなければならない.

122. 球対称な静的な系

系が**静的**で，**球対称**なる場合，a および b なる函数は t に無関係である. この場合 (4′) で定義された M_{ik} という量を容易に計算することができる. $x^i=(r,\theta,\phi,ct)$ とすれば

$$g_{11}=a(r), \qquad g_{22}=r^2, \qquad g_{33}=r^2\sin^2\theta, \qquad g_{44}=-b \tag{65}$$

で，他の成分はすべて零である. この座標系は直交系で g^{ik} の零でない成分は簡単に

$$\left.\begin{aligned} g^{11}&=\frac{1}{g_{11}}=\frac{1}{a}, & g^{22}&=\frac{1}{g_{22}}=\frac{1}{r^2} \\ g^{33}&=\frac{1}{g_{33}}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}, & g^{44}&=\frac{1}{g_{44}}=-\frac{1}{b} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

となる．また Christoffel 記号 (IX. 50) は

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{g_{ii}}\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x}+\delta_{il}\frac{g_{ii}}{\partial x^k}-\delta_{kl}\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}\right) \tag{67}$$

という形になる (i や k については和をとらない)．

g_{ik} は φ と x^4 によらないから，$\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$ の零でない成分としては次のものだけになることがわかる．

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{11}=\frac{a'}{2a},\ \Gamma^1_{22}=-\frac{r}{a},\ \Gamma^1_{33}=-\frac{r}{a}\sin^2\theta,\ \Gamma^1_{44}=\frac{b'}{2a} \\ &\Gamma^2_{12}=\frac{1}{r},\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23}=\cot\theta,\ \Gamma^4_{14}=\frac{b'}{2b} \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

ここでダッシュは r に関する微分を表わす．

(68) を (IX. 114) に代入すればテンソル R_{ik} がえられ，これを縮約すればスカラー $R=R^i_i$ がえられる．最後にテンソル M_{ik} およびその混合成分 M^k_i は (4′) からえられる．すぐわかるように，このテンソルの対角成分以外は零で，4 つの対角成分 M^1_1, M^2_2, M^3_3, M^4_4 は r のみの函数になる．そのときは，回転に対するこのテンソルの変換性から考えて，M^2_2 と M^3_3 とが等しくなければならないことがわかる．一方，恒等式 (11) により，この 3 つの量 M^1_1, $M^2_2=M^3_3$, M^4_4 も独立ではありえない．容易にわかるように，静的な球対系の場合には方程式 (11) は，唯 1 個の式になってしまう．これにより $M^2_2=M^3_3$ は，M^1_1 と M^4_4 および dM^1_1/dr で表わされる．計算の結果，M^k_i の零ならざる成分として，

$$M^1_1=-\frac{b'}{abr}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)-\lambda, \tag{69 a}$$

$$M^4_4=\frac{a'}{a^2r}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)-\lambda, \tag{69 b}$$

$$M^2_2=M^3_3=-\frac{1}{2a}\left[\left(\frac{b'}{b}\right)'-\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\frac{b'}{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{b'}{b}\right)^2+\frac{b'}{br}-\frac{a'}{ar}\right]-\lambda \tag{69 c}$$

がえられる．

これら陽表的に計算された M^k_i の成分が恒等式 (11) を満たすことは容易に検証することができる．

123. Schwarzschild の外部解

質量が M の質点のまわりの真空中では $T^k_i=0$ である．したがって場の方程式 (13) は

$$-\frac{b'}{abr}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)-\lambda=0, \tag{70 a}$$

$$\frac{a'}{a^2r}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)-\lambda=0, \tag{70 b}$$

$$-\frac{1}{2a}\left[\left(\frac{b'}{b}\right)'-\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\frac{b'}{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{b'}{b}\right)^2+\frac{b'}{br}-\frac{a'}{ar}\right]-\lambda=0 \tag{70 c}$$

となる．最後の式は，はじめの 2 つの式から導き出すことができる．(70 a) と (70 b) の差をとれば

$$\frac{a'b+ab'}{a^2br}=0,$$

すなわち

$$(ab)'=0, \tag{71}$$

あるいは

$$ab=一定 \tag{72}$$

がえられる

$$y=\frac{1}{a} \tag{73}$$

とおいて (70 b) を，$-r^2$ 倍すれば

$$ry'+y-1+\lambda r^2=0, \tag{74}$$

あるいは

$$(yr)'=1-\lambda r^2 \tag{75}$$

が成立する．したがってこれを積分して

$$ry=r-\frac{\lambda r^3}{3}-2m \tag{76}$$

をえる．ここに m は積分定数である．またはこれを書き改めれば

$$y=1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda r^2}{3} \tag{77}$$

となる．(73) と (77) から，(70 b) の解として

$$a=\frac{1}{1-2m/r-\lambda r^2/3} \tag{78}$$

がえられる．

空間の線素は，この場合 (63) の空間部分に等しいから

$$d\sigma^2=\frac{dr^2}{1-2m/r-\lambda r^2/3}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{79}$$

となる．小さな λ 項を無視すれば，r が大きな極限で $d\sigma^2$ は極座標で表わした普通の Euclid 空間の線素に一致する．そして無限遠における境界条件を陽表

的に用いなくても，球対称という条件だけからこの結果がえられたということは非常に興味あることである．この結果は，一部は (60) で変数 r を，r=一定なる面上の幾何学が Euclid 空間における半径 r の球面の上の幾何学に一致するように規格化したことにも原因している．しかし実際の空間 (79) では r はそのまま動径方向の距離を表わしてはいない．2点 (r_1, θ, ϕ) と (r_2, θ, ϕ) 間の距離を標準物指で測った結果は

$$l=\int_{r1}^{r2}(1-2m/r-\lambda r^2/3)^{-1/2}dr \tag{80}$$

である．

しかし，中心に存在する物体から十分遠方に離れている観測者は，Euclid 空間中にその系の描像を描こうとすることであろう．この描像では r は中心からの距離の役割を演ずることになる．そして，天文学では標準尺で測った距離 l などは現実的な重要性をもっていない．したがって座標 (r, θ, ϕ) を，天体力学で使っている普通の極座標と考えてさしつかえないのである．

(72) によれば，

$$b=\frac{\text{定数}}{a}=\text{定数}\times\left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda r^2}{3}\right) \tag{81}$$

となる．

時間の目盛をかえることによってこの定数を1に等しくすることができる．このようにして，われわれは Scharwzschild の外部解†と呼ばれている

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda r^2}{3}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) -\left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda r^2}{3}\right)c^2dt^2 \tag{82}$$

に到達する．r が非常に大きな場合にだけ重要な λ 項を無視すれば，これは

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)-\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 \tag{83}$$

となる．

この式が成り立つ範囲は，球対称に分布する物質の外側でなければならない．そしてこの式は

$$1-\frac{2m}{r_0}=0 \tag{84}$$

から定まる距離 $r=r_0$ のところに特異点をもっているから，質量分布の'半径'

† K. Schwarzschild, *Berl. Ber.*, p. 189 (1916)

が (84) できまる値より大きくなければならないという結論がでる. $r=r_0$ にあるこの特異性は他の‘静的な’座標系を用いても完全に除去することはできない. 例えば変換

$$r=r'\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2, \qquad r'=\frac{1}{2}\{(r^2-2mr)^{\frac{1}{2}}+r-m\} \tag{85}$$

で定義されるいわゆる‘等方的な’座標 r', θ, ϕ, t を用いれば, 特異性を変形することはできるが, 取り除くことはできない. このとき, 線素は

$$ds^2=\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^4(dr'^2+r'^2d\theta^2+r'^2\sin^2\theta d\phi^2)-\frac{(1-m/2r')^2}{(1+m/2r')^2}c^2dt^2 \tag{86}$$

という形になる. そして, この新しい動径座標では, 特異点 $r_0=2m$ は点 $r_0'=\frac{m}{2}$ に相当するが, (86) からわかるようにこの点は特異点でなくなり, 線素の空間部分から特異性が除去されている. しかし, 特異性は g_{44} の方に移り, g_{44} は $r_0=m/2$ で零になってしまう. Serini, Einstein, Pauli† 等が示したように, 真空に対する場の方程式の解で, 定常であって, 無限の遠方で $g_{44}=-1+$定数$/r$ なる形であるような, しかも特異性をもたないものは存在しないのである. 今調べたように, g_{44} の形は, この場が原点のまわりに分布する質量によって作られたものであることを示している. このスカラー・ポテンシャルはもちろん変換 (85) に対して不変であって, (83) および (86) に対応する2つの座標系で

$$\left.\begin{aligned}\chi&=(-g_{44}-1)\frac{c^2}{2}=-\frac{mc^2}{r},\\ \chi'&=(-g'_{44}-1)\frac{c^2}{2}=-\frac{mc^2}{r'(1+m/2r')^2}\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

となる.

十分遠方ではこの場は弱まり, 両式は共に Newton 型 $-mc^2/r=-mc^2/r'$ になる. このことから定数 m は, この場を作っている質量 M と

$$m=\frac{kM}{c^2}=\frac{\kappa c^2M}{8\pi} \tag{88}$$

という関係があることがわかる. 場が弱い領域では, (86) は

$$ds^2=\left(1+\frac{2m}{r'}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)-\left(1-\frac{2m}{r'}\right)c^2dt^2 \tag{86'}$$

† R. Serini, *Atti Accad. Lincei* (5), **27**[1], 235 (1918): A. Einstein, *Revista* (*Univ. Nac. Tucuman*), A, **2**, 11 (1941): A. Einstein and W. Pauli, *Ann. of Math.* **44**, 131 (1943)

となる．ただし

$$x=r'\sin\theta\cos\phi,\quad y=r'\sin\theta\sin\phi,\quad z=r'\cos\theta \tag{86''}$$

とおいた．

(88) により，この式は場の方程式の線型近似方程式，(30) の静的な解と一致する．

Lemaître† がはじめて注意したように，変換

$$r=(9m/2)^{1/3}(r'-ct')^{2/3},\quad dt'=dt-\frac{(2m/r)^{1/2}}{1-2m/r}dr, \tag{89}$$

によって‘静的でない’座標系 r', θ, ϕ, t' を導入すれば，線素の特異性を除去できる．このとき線素 (83) は

$$ds^2=\frac{2m}{r}dr'^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)-c^2dt'^2 \tag{90}$$

となる．ここで r は (89) により，r' と t' に依存する．この新しい座標系は §113 で考えた型，すなわち重力場の力学的効果を変換によって消去したものであって，力学的ポテンシャル (γ_ι, χ) は零である．この座標系では惑星の運動は方程式 (X. 20′) で記述される．すなわち時刻 $t'+dt'$ における粒子の運動量ベクトルの共変成分は，時刻 t' におけるそのベクトルを，線素が

$$d\sigma^2=\frac{2m}{r}dr'^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$$

であるような空間内で平行移動することによってえられる．しかし r が時間に依存するので，この準拠系は変形し，したがってこのような座標系における惑星の運動は非常に複雑なものになる．

124. 完全流体の内部に対する Schwarzschild の解

完全流体のエネルギー・運動量テンソルは (X. 48) すなわち，

$$T_i^k=\left(\overset{0}{\mu}{}^0+\frac{\overset{0}{p}}{c^2}\right)U_iU^k+\overset{0}{p}\delta_i^k \tag{91}$$

で与えられる．

場の方程式 (13)

$$M_i^k=-\kappa T_i^k \tag{92}$$

およびテンソル M_i^k を表わす式 (69) によれば，(63) の形の，静的で球対称な場が可能なのは，物質の速度 u^ι が零で，固有質量の密度 $\overset{0}{\mu}{}^0$ および固有圧力 $\overset{0}{p}$ が r のみの函数である場合に限る．ゆえに (X. 2, 3) および (65) により，

† G. E. Lemaître, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles*, Sér. A. 53, 51 (1933): また G. L. Synge, *Proc. Roy. Irish Soc.* 53, No. 6, 83 (1950)

$$\left.\begin{aligned} &U^i=\left(0,\,0,\,0,\,\frac{c}{\sqrt{b}}\right)\\ &U_i=g_{ik}U^k=(0,0,0,-c\sqrt{b})\\ &T_i^k=-\left(\mathring{\mu}^0+\frac{\mathring{p}}{c^2}\right)c^2\delta_{i4}\delta_{k4}+p\delta_i^k\\ &\mathring{\mu}^0=\mathring{\mu}^0(r),\qquad \mathring{p}=\mathring{p}(r)\end{aligned}\right\}\tag{92'}$$

となる．この式と保存則

$$T_{i;k}^k=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial(\sqrt{|g|}T_i^k)}{\partial x^k}-\Gamma_{is}^r T_r^s=0 \tag{93}$$

から，$i=1$ の場合について，

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{|g|}\mathring{p})+\Gamma_{14}^4(\mathring{\mu}^0c^2+\mathring{p}^0)-\Gamma_{1r}^r\mathring{p}=0$$

がえられる．あるいは，(68) と (IX. 69) により，この式は

$$\frac{d\mathring{p}}{dr}(\mathring{\mu}^0c^2+\mathring{p}^0)\frac{b'}{2b}=\frac{d\mathring{p}}{dr}+\frac{\mathring{\mu}^0+\mathring{p}/c^2}{1+2\chi/c^2}\frac{d\chi}{dr}=0 \tag{94}$$

と書ける．この式は，流体が自分で作った重力場と釣り合っている状態における圧力と重力ポテンシャルの関係を与えている．保存則 (93) の他の 3 式からはこれ以外の新しい関係はえられない．

この場合にも場の方程式 (92) の独立のものは 2 つしかない．独立のものとして，ここでは

$$M_1^1=-\kappa T_1^1,\quad M_4^4=-\kappa T_4^4 \tag{95}$$

をとることにする．(92) の他の方程式はすべて，(95) と保存則 (94) から導かれるのである．したがって，(69 a, b), (92′), (95) から

$$\frac{b'}{abr}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\lambda=\kappa\mathring{p}, \tag{96 a}$$

$$\frac{a'}{a^2r}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)-\lambda=\kappa\mathring{\mu}^0c^2 \tag{96 b}$$

をえる．(94), (96) および $\mathring{p}$ と $\mathring{\mu}$ の間の関係を与える物質の状態方程式から，内部状態および流体の重力場が定まる．

簡単のため，この流体は，事実上非圧縮性のものであると仮定することにしよう．そうすると固有質量の密度は定数として取り扱ってよく，(96 b) の解は (70 b) の解で $\lambda\to\lambda+\kappa\mu^0c^2$ とおきかえたものになる．$r\to0$ でこの解は零でなければならぬから，(78) の積分定数 $2m$ はこの場合零とおかねばならぬ．ゆ

えに

$$a=\frac{1}{1-\frac{\lambda+\kappa\overset{0}{\mu}{}^0c^2}{3}r^2}=\frac{1}{1-\frac{r^2}{R^2}} \tag{97}$$

をえる．ここで

$$R^2=\frac{3}{\lambda+\kappa\overset{0}{\mu}{}^0c^2} \tag{98}$$

とおいた．$\overset{0}{\mu}{}^0c^2$ が定数であるから (94) をさらに積分して，

$$(\overset{0}{\mu}{}^0c^2+\overset{0}{p})\sqrt{b}=一定$$

がえられる．(96 a, 96 b) を加え合せ $\sqrt{b}$ をかければ

$$\frac{b'}{a\sqrt{b}\,r}+\frac{a'\sqrt{b}}{a^2r}=一定$$

をえる．

この式に a を表わす式 (97) を代入すれば

$$\sqrt{b}+R^2\frac{1-r^2/R^2}{r}\frac{d\sqrt{b}}{dr}=A \tag{99}$$

となる．ここで A は定数である．$y=\sqrt{b}$ とおき，r の代りに新らしい変数 $x=(1-r^2/R^2)^{1/2}$ を導入すれば (99) は

$$y-x\frac{dy}{dx}=A \tag{100}$$

と書ける．(100) の解は $y=A-Bx$ である．ただしここで B は積分定数である．したがって

$$b=y^2=(A-B\sqrt{(1-r^2/R^2)})^2 \tag{101}$$

となる．最後に (97), (101), と (96 a) を用いれば，局所慣性系で測った圧力 $\overset{0}{p}$ として次の式がえられる．

$$\kappa\overset{0}{p}=\frac{3B\sqrt{(1-r^2/R^2)}-A}{R^2\{A-B\sqrt{(1-r^2/R^2)}\}}+\lambda \tag{102}$$

このようにして Schwarzschild の内部解†

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-r^2/R^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)-\{A-B\sqrt{(1-r^2/R^2)}\}^2c^2dt^2 \tag{103}$$

がえられる．

この空間の幾何学は，線素

† K. Schnarzschild, *Berl*, *Ber*., p. 124 (1916)

$$d\sigma^2=\frac{dr^2}{1-r^2/R^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{104}$$

で定義される．したがって $r=r_1=$ 一定の面上での幾何学は Euclid 空間における半径 r_1 の球面上の幾何学と同じである．しかし，r_1 は標準物指で測った原点 $r=0$ からの距離ではない．この距離は

$$\begin{aligned} l_1&=\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}}=R\sin^{-1}\frac{r_1}{R} \\ &=r_1\left(1+\frac{1}{6}\left(\frac{r_1}{R}\right)^2+\frac{3}{40}\left(\frac{r_1}{R}\right)^4+\cdots\cdots\right) \end{aligned} \tag{105}$$

である．この球の体積は

$$\begin{aligned} V_1&=\int_0^{r_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\gamma}drd\theta d\phi=\iiint\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}}drd\theta d\phi \\ &=4\pi\int_0^{r_1}\frac{r^2dr}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}}, \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} V_1&=\frac{4\pi R^3}{2}\left[\sin^{-1}\frac{r_1}{R}-\frac{r_1}{R}\sqrt{\left(1-\frac{r_1^2}{R^2}\right)}\right] \\ &=\frac{4\pi r_1^3}{3}\left[1+\frac{3}{10}\left(\frac{r_1}{R}\right)^2+\cdots\cdots\right] \end{aligned} \tag{106}$$

である．

$r=r_1$ の内部の空間を一定の固有質量密度 $\overset{0}{\mu}{}^0$ の流体で満たした球を考えよう．$r>r_1$ に対しては Schwarzschild の外部解 (82) が成り立つが，$r<r_1$ に対しては (103) という解がえられる．そこで，われわれは $r=r_1$ で (103) と (82) が一致し，しかも $\overset{0}{p}$ がこの球の表面で零になるように定数 A, B を調節しなければならない．太陽系内でも λ 項は小さいので，これを無視すれば，上に述べた条件は次の式で表わされる．

$$1-\frac{2m}{r_1}=1-\frac{r_1^2}{R^2}=\{A-B\sqrt{(1-r_1^2/R^2)}\}^2,$$

$$3B\sqrt{(1-r_1^2/R^2)}-A=0,\quad R^2=\frac{3}{\kappa\overset{0}{\mu}{}^0c^2}.$$

この解は

$$\left.\begin{aligned} &A=\frac{3}{2}\sqrt{(1-r_1^2/R^2)},\quad B=\frac{1}{2},\quad R^2=\frac{3}{\kappa\overset{0}{\mu}{}^0c^2} \\ &m=\frac{r_1^3}{2R^2}=\frac{\kappa c^2\overset{0}{\mu}{}^0}{6}r_1^3=\frac{k\overset{0}{\mu}{}^0}{c^2}\frac{4\pi}{3}r_1^3 \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

となる．(88) と比べてみればわかるように，十分遠方におけるこの流体球の

重力場は，質量

$$M=\frac{4\pi}{3}r_1^3\overset{0}{\mu}{}^0 \tag{108}$$

が作る重力場に一致する．したがって，Euclid 空間中で半径が r_1 の球に Newton の質量が一様に分布している場合と同じである．

(106) によればこの球の体積は $\frac{4\pi}{3}r_1^3$ より大きい．一方 $\overset{0}{\mu}{}^0$ は，局所慣性系で測った質量密度であるから，ここで用いている座標系での質量密度とは異なる．§128 で示すように M という量は実際はこの系の全エネルギーを c^2 で割ったものに厳密に等しいのである．いずれにしても (106) で与えられる本当の体積 V_1 と $\frac{4\pi}{3}r_1^3$ との差は，天文学に応用されるあらゆる場合について非常に小さいのである．例えば，太陽の場合には，

$$\overset{0}{\mu}{}^0=1.4\ \text{gm. cm.}^{-3},\quad r_1=6.95\times10^{10}\ \text{cm} \tag{109}$$

であるから，このときは

$$\left.\begin{aligned}&R=3.5\times10^{13}\ \text{cm}\\&\frac{r_1}{R}\approx2\times10^{-3}\\&\frac{V_1-4\pi r_1^3/3}{4\pi r_1^3/3}\approx10^{-6}\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

となる．

(105) で定義された距離 l_1 と動径座標 r_1 の差も天文学的に r_1 をきめた上でそれを検知するのには小さすぎる．

また外部解 (83) が使えるための条件 $r_1>r_0=2m$ も満足されていることがわかる．何となれば，(107) から

$$\frac{2m}{r_1}=\frac{r_1^2}{R^2}\approx10^{-6}<1$$

がえられるからである．

真空の場合と同様，この場合にも等方的座標を導入することができる．(63) 式中の $a(r)$, $b(r)$ が任意の函数の場合でも，微分方程式

$$\frac{dr'}{r'}=\sqrt{\{a(r)\}}\frac{dr}{r} \tag{111}$$

を満足するような変換 $r'=r'(r)$ を行うことによって，このような座標系を導入することができる．(111) の一般解は

$$r'=C\exp\left(\int^r\frac{\sqrt{\{a(r)\}}}{r}dr\right) \tag{112}$$

である. ここでCは任意定数である. したがって線素は,

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{r'^2}[dr'^2+r'^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]-bc^2dt^2 \\ &= \frac{r^2}{r'^2}(dx^2+dx^2+dz^2)-bc^2dt^2 \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

となる. (x, y, z) は (86′) で与えられるものである.

$a(r)$ が (97) の型のときは

$$r'=C\frac{r/R}{1+\sqrt{(1-r^2/R^2)}}, \qquad r=r'\frac{2CR}{C^2+r'^2} \tag{114}$$

となり, この非圧縮性流体内部における線素は

$$ds^2=\frac{4C^2R^2}{(C^2+r'^2)^2}(dx^2+dy^2+dz^2)-\left[A-B\frac{C^2-r'^2}{C^2+r'^2}\right]^2c^2dt^2 \tag{115}$$

という形をとる. 定数Cは流体の境界で(114)と(85)が一致するように決める.

Schwarzschild の解は, 天文学上に応用面をもっている重力場の方程式の唯一の厳密解である. Reissner† と Weyl‡ は荷電粒子のまわりの電磁エネルギーによって作られる重力場の問題をも解いている. これらの人達のえた結果は

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-2m/r+\kappa e^2/r^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \\ -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{\kappa e^2}{r^2}\right)c^2dt^2 \tag{116}$$

という型の線素である. したがってこの式中の荷電による項と質量による項の比は, (88) により

$$\frac{\kappa e^2}{r\cdot 2m}=\frac{4\pi e^2}{rMc^2} \tag{117}$$

となる.

したがって電子の場合にこの2項は古典電子半径 $r=\dfrac{e^2}{Mc^2}$ の距離で同程度の大きさになる. しかしこの項が電子間の相互作用におよぼす影響はいずれも Coulomb 相互作用に比べれば無視できる程度の大きさにすぎない.

さらに物質が任意の円筒対称な分布のときにも場の方程式の厳密解がWeyl§と Levi-Civita‖ によってえられている.

---

† H. Reissner, *Ann. d. Phys.* **50**, 106 (1916)

‡ H. Weyl, ibid. **54**, 117 (1917): *Raum-Zeit-Materie*, 3rd ed., p. 223, Berlin, 1920.

§ H. Weyl, *Ann. d. Phys*, **54**, 117 (1917): **59**, 185 (1919)

‖ T. Levi-Civita, *Rend. Accad, Lincei* (5), No. 26 (1917): No. 27 (1918) No. 28 (1919)

125. 重力場に対する変分原理

Σ を4元空間での任意の領域として次の4次元積分について考える.

$$J_1=\int_\Sigma R d\Sigma=\int_\Sigma R_{ik}g^{ik}\sqrt{(-g)}dx^1dx^2dx^3dx^4, \tag{118}$$

ただし, $R=R_{ik}g^{ik}$ は曲率スカラーであり

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}+\Gamma^r_{il}\Gamma^l_{kr}-\Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{rl} \tag{119}$$

は縮約曲率テンソルである. (118) の被積分函数は g_{ik} およびその導函数の代数函数である. 反変成分 g^{ik} は g_{ik} から一意的に決るから, この被積分函数は g^{ik} およびその導函数の函数として表わすこともできる. さて計量テンソルの変分 δg^{ik} を考える. この変分は, Σ の内部では任意であるが, Σ の境界上ではそれ自身およびその1階の微係数が零であるようなものであるとする. そのときは, これに対する J_1 の変分は

$$\delta J_1=\int\delta R_{ik}\sqrt{(-g)}g^{ik}dx+\int R_{ik}\delta\sqrt{(-g)}g^{ik})dx \tag{120}$$

となる. (119) を用い

$$\delta R_{ik}=\frac{\partial\delta\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\delta\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}+\delta\Gamma^r_{il}.\Gamma^l_{kr}+\Gamma^r_{il}\delta\Gamma^l_{kr}$$
$$-\delta\Gamma^r_{ik}.\Gamma^l_{rl}-\Gamma^r_{ik}\delta\Gamma^l_{rl} \tag{121}$$

がえられる.

Christoffel 記号は変換式 (IX. 53) によって変換され, この式は, その右辺第1項があるためにテンソルの変換式とは異なるが, 同じ点における2つの Christoffel 記号の差である $\delta\Gamma^i_{kl}$ は明らかにテンソルのように変換される. したがって共変微分

$$(\delta\Gamma^i_{kl})_{;m}=\frac{\partial\delta\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{mr}\delta\Gamma^r_{kl}-\Gamma^r_{km}\delta\Gamma^i_{rl}-\Gamma^r_{lm}\delta\Gamma^i_{kr} \tag{122}$$

も1つのテンソルになる. このことから δR_{ik} なるテンソルを

$$\delta R_{ik}=(\delta\Gamma^l_{il})_{;k}-(\delta\Gamma^l_{ik})_{;l} \tag{123}$$

のように簡単な形に書くことが許される. このテンソル関係式を証明するのに最も簡単なのは, 測地座標系を導入することである. この系では $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl}=0$ であるから, (121) の右辺が (123) に等しくなることはすぐにわかる.

(123) に $\sqrt{(-g)}g^{ik}$ をかけ, (IX. 85, 86, 90) を用いれば,

$$\sqrt{(-g)}g^{ik}\delta R_{ik}=\sqrt{(-g)}[(g^{ik}\delta\Gamma^l_{il})_{;k}-(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik})_{;l}]$$
$$=\sqrt{(-g)}(g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}-g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik})_{;l}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{(-g)}[g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}-g^{ik}\Gamma^l_{ik}])$$

がえられる．ゆえに，(120) の第 1 項の被積分函数は普通の発散の形になる．したがってこの積分は Σ の表面上の積分に変換される．ところがこの表面上では変分 δg^{ik} およびその 1 階の微係数が零であるから，(120) の第 1 項は零になる．

また，(IX. 69′) から

$$\delta\sqrt{(-g)}=\frac{1}{2}\frac{-\delta g}{\sqrt{(-g)}}=-\frac{1}{2}\frac{gg^{ik}}{\sqrt{(-g)}}\delta g_{ik}=-\frac{1}{2}\sqrt{(-g)}g_{ik}\delta g^{ik}, \tag{124}$$

$$\delta\{\sqrt{(-g)}g^{ik}\}=\sqrt{(-g)}\left(\delta g^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\delta g^{lm}\right) \tag{124′}$$

となり，(120) の第 2 項の被積分函数は

$$R_{ik}\delta\{\sqrt{(-g)}g^{ik}\}=\sqrt{(-g)}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\delta g^{ik}$$

となる．したがって，不変量 J_1 の変分は

$$\delta J_1=\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{(-g)}\,dx \tag{125}$$

となる．同様にして，(124) により，

$$\delta\int 2\lambda\sqrt{(-g)}dx=-\int\lambda g_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{(-g)}\,dx \tag{126}$$

がえられる．そこで (125) と (126) を加えさせれば不変量

$$J=\int(R+2\lambda)\sqrt{(-g)}dx \tag{127}$$

の変分が

$$\delta J=\int M_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{(-g)}dx \tag{128}$$

に等しくなることがわかる．ここで M_{ik} は，場の方程式 (12) の左辺に現われるテンソルである．したがって真空中の場の方程式

$$M_{ik}=0 \tag{129}$$

は Σ の境界面で δg^{ik} およびその 1 階の微係数が零であるようなあらゆる変分に対して

$$\delta J=0 \tag{130}$$

であるという変分原理と同等である．

J_1 や J から，普通の発散の式を被積分項とする積分を引き去っても，(125) や (128) がそのまま成り立つ．なぜならばこの引き去る項は表面積分に直り，い

ま考えているような変分に対しては，これは δJ_1 および δJ に寄与しないからである．さて，(119) のはじめの2項の $R\sqrt{-g}=R_{ik}g^{ik}\sqrt{-g}$ に対する寄与は，

$$\left(\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}\right)\sqrt{(-g)}g^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^k}\{\sqrt{(-g)}g^{ik}\Gamma^l_{il}\}-\frac{\partial}{\partial x^l}\{(\sqrt{(-g)}g^{ik}\Gamma^l_{ik}\}$$
$$-\frac{\partial\{\sqrt{(-g)}g^{ik}\}}{\partial x^k}\Gamma^l_{il}+\frac{\partial\{\sqrt{(-g)}g^{ik}\}}{\partial x^l}\Gamma^l_{ik} \tag{131}$$

と書くことができる．この式のはじめの2項は普通の発散であるから無視することができる．また (IX. 68) によって $\partial g^{ik}/\partial x^l$ を Chritstoffel 記号を含む項で表わし，

$$\frac{\partial\sqrt{(-g)}}{\partial x^l}=\sqrt{(-g)}\Gamma^r_{lr}$$

という関係を用いれば，(131) の最後の2項は $2\mathfrak{L}$ になることがわかる．ただし

$$\mathfrak{L}\equiv\sqrt{(-g)}g^{ik}(\Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{rl}-\Gamma^r_{il}\Gamma^l_{kr}) \tag{132}$$

である．(119) の終りの2項の $R\sqrt{(-g)}$ に対する寄与は $-\mathfrak{L}$ であるから，(125) と (128) から，

$$\delta\int\mathfrak{L}dx=\int\sqrt{(-g)}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\delta g^{ik}dx \tag{133}$$

および

$$\delta\int\mathfrak{H}dx=\int\sqrt{(-g)}M_{ik}\delta g^{ik}dx \tag{134}$$

となる．ここで

$$\mathfrak{H}\equiv\mathfrak{L}+2\lambda\sqrt{(-g)} \tag{135}$$

である．積分 $\int\mathfrak{L}dx$ および $\int\mathfrak{H}dx$ は不変量ではない．しかしそれにもかかわらず，どの座標系でも，これらの積分は，(132), (135) と同じ式で定義されるので，(133) および (134) は共変的な意味をもっている．

J_1 や J の被積分函数の場合と異なり，$\mathfrak{L}$ および $\mathfrak{H}$ は計量テンソルの2階の微係数を含んでいない．したがってこれらは g^{ik} およびその1階の微係数

$$g^{ik}_l\equiv\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_l} \tag{136}$$

の函数と見なしてよい．

$\delta g^{ik}_l=\dfrac{\partial}{\partial x^l}\delta g^{ik}$ であるから

$$\delta\int\mathfrak{L}dx=\int\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_l^{ik}}\delta g_l^{ik}\right)dx$$

$$=\int\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_l^{ik}}\right)\right]\delta g^{ik}dx \tag{137}$$

となることは明らかである．同様に

$$\delta\int\mathfrak{H}dx=\int\left[\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_l^{ik}}\right)\right]\delta g^{ik}dx \tag{138}$$

となる．

$\int\mathfrak{L}dx$ を表わす式 (133) および (137) は，任意の領域 Σ 内の任意の変分 δg^{ik} について等しくなければならないから，各点ごとに

$$\sqrt{(-g)}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}\right)=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_l^{ik}}\right) \tag{139}$$

でなければならない．

同様に (134) と (138) を比較することにより

$$\sqrt{(-g)}M_{ik}=\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_l^{ik}}\right) \tag{140}$$

がえられる．以上の議論中，われわれは，変数 g^{ik}, g_l^{ik} が独立なものとして取り扱い，対称性 $g^{ik}=g^{ki}$, $g_l^{ik}=g_l^{ki}$ について考慮しなかった．このことが許されるのは，導かれた結果の (139) と (140) の右辺が i と k について対称な場合だけである．$\mathfrak{L}$ や $\mathfrak{H}$ は一般には複雑な変換性を有するが，(139) および (140) の右辺の共変式は，テンソル密度のように変換されなければならない．

g_l^{ik} を一定に保ち，g^{ik} をすべて λ 倍すれば (IX. 7, 4, 50) からわかるように g_{ik}, $\sqrt{(-g)}$, Γ^i_{kl} はそれぞれ λ^{-1}, λ^{-2}, λ^{-1} 倍される．したがって $\mathfrak{L}$ は λ^{-3} 倍される．よって Euler の定理から

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{ik}}g^{ik}=-3\mathfrak{L} \tag{141}$$

がえられる．

同様にして $\mathfrak{L}$ が g_l^{ik} の函数としては 2 次の斉次函数であることがわかる．したがって，

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_l^{ik}}g_l^{ik}=2\mathfrak{L} \tag{142}$$

がえられる．

126. エネルギーおよび運動量の保存則

§115 で，荷電の保存則が共変的な発散の式 $\mathrm{div}\{s^i\}=0$ からえられること

を示した．このことは4元ベクトルの共変的発散が零になることとベクトル密度の普通の発散が零になることが同等であるという事情に関係している．すなわちこれを空間座標について積分すれば，直ちに全荷電が時間的に一定であるという結果がえられる．

ところが，(X. 41) あるいは

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\{\sqrt{(-g)}T^k_{i}\}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\sqrt{(-g)}T^{kl}\equiv k_i \tag{143}$$

で表わされるエネルギー・運動量の保存則は，一般には，普通の発散が零になることと同等ではなく，したがってこれを空間座標について積分しても直ちに保存則がえられない．特に，§114 で考えた定常的な系の場合に限り，(143) の右辺が $i=4$ の場合に零になるので，これを空間座標について積分することによって，直ちに全エネルギーと解釈することのできる運動の恒量がえられる．

(143) に右辺の項が現われることは，この系が厳密に云って，閉じた系ではないことを示している．この項は，特殊相対論の場合の閉じていない系 (VII 章参照) に作用する外力の4元力の密度に相当するものである．電磁力の場合には，力の4元的密度は，電磁エネルギー・運動量テンソルの発散の形に書くことができた．これと同様に，場の方程式 (12) を用いると (143) の右辺の

$$k_i\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\sqrt{(-g)}T^{kl} \tag{144}$$

という項も，共変的に

$$k_i=-\frac{\partial\{\sqrt{(-g)}t^{k}_{i}\}}{\partial x^k} \tag{145}$$

という形に書くことができる．ここで t^{k}_{i} は計量テンソルとその1階の微係数を含む 4^2 個の量である．k_i および t^{k}_{i} なる量はもちろん，テンソルのような変換をしないが，これから確めるように，(143), (144), (145) なる量を空間座標について積分することによって，簡単な変換性と簡単な物理的な意味を有する量の保存則がえられる†．

(145) を証明するため，指標を下げる規則と (IX. 7) により先ず (144) が

$$k_i=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}\sqrt{(-g)}T_{kl} \tag{144'}$$

と書けることに注意する．

次に (12) を (144′) に代入し，(140) を用いれば，

† A. Einstein, *Berl. Ber.*, p. 778 (1915): *Ann. d. Phys.* **49**, 769 (1916); *Berl. Ber.*, p. 448 (1918): E. Klein, *Göt. Nachr., Math.-Phys. Klasse*, p. 394 (1918)

$$k_i=-\frac{1}{2}\sqrt{(-g)}T_{kl}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}=\frac{1}{2\kappa}\sqrt{(-g)}M_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}$$
$$=\frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_k^{lm}}\right)\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\right\}$$
$$=\frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_k^{lm}}\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_k^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\right)\right\}$$

となる.

$\mathfrak{H}$ は g^{lm} と g_k^{lm} だけの函数で

$$\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^i\partial x^k}=\frac{\partial g_k^{lm}}{\partial x^i}$$

であるから括弧中のはじめの2項の和は $\dfrac{\partial\mathfrak{H}}{\partial x^i}$ に等しい.

したがって,

$$\sqrt{(-g)}t_{i\cdot}^{k}=\frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_k^{lm}}g_i^{lm}-\delta_i^k\mathfrak{H}\right\}$$
$$=\frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_k^{lm}}g_i^{lm}-\delta_i^k\mathfrak{L}-\delta_i^k 2\lambda\sqrt{(-g)}\right\} \tag{146}$$

とおけば, k_i は (145) の形に書かることになる.

(145) を (143) に代入すれば, エネルギーおよび運動量の保存則は

$$\frac{\partial\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}}{\partial x^k}=0 \tag{147}$$

という形に書くことができる. ここで

$$\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}=\sqrt{(-g)}(T_i^k+t_{i\cdot}^{k}) \tag{148}$$

とおいた.

$t_{i\cdot}^{k}/\sqrt{(-g)}$ なる量は一般にテンソルのようには変換しない. $\mathfrak{L}$ は g_i^{lm} に関する2次形式であるから, λ 項を無視すれば, ある点で測地的であるような座標系を導入して, その点での $t_{i\cdot}^{k}$ という量を零にすることができる. $\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}/\sqrt{(-g)}$ という量は, 変換係数 α_i^k が定数である場合に限りテンソルのように変換される. しかし, 空間座標について積分すればもっと一般的な変換に対してベクトルのように変換される量がえられる. 4元空間内で空間的に有限なひろがりを有する管の内部でのみ T_i^k が零でないような弧立系を考えることにしよう. この管から十分空間的に距ったところでは, 座標系を過当に選んで g_{ik} が特殊相対論の場合の定数の G_{ik} になるようにすることができる. このような座標系を準 Galilei 系と呼ぶことにしよう. 管内ではこの座標系は全く任意である. λ-項を無視すれば, 系から十分空間に遠いところでは, $\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}$ は零になる. そして (147) をその空間座標 x^1, x^2, x^3 で積分すれば, 直ちに

$$\frac{d}{dx^4}\int \mathfrak{T}_{i\cdot}^{\cdot 4}dx^1dx^2dx^3=0 \tag{149}$$

がえられる．

ゆえに

$$P_i=\frac{1}{c}\int \mathfrak{T}_{i\cdot}^{\cdot 4}dx^1dx^2dx^3=\frac{1}{c}\int \sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)}(T_i^4+t_{i\cdot}^{\cdot 4})dV \tag{150}$$

は時間的に一定である．

さらに，管外で x^i はを変えず管内だけで変換 $x'^i=x'^i(x^k)$ を行うことに対して，P_i は不変であることが容易にわかる．これを証明するに $x''^4=a=$一定で定義される超曲面 Ω_1 上では座標系 (x^i) に一致し，$x''^4=b$ なる超曲面 Ω_2 上では座標系 (x'^i) に一致するような第3の座標系 x''^i を導入すればよい．この3つの座標系の上で (150) という量は一定であるから，このことから直ちに

$$P_i=P_i|_{\Omega_1}=P''_i|_{\Omega_1}=P''_i|_{\Omega_2}=P'_i|_{\Omega_2}=P'_i \tag{151}$$

がえられる．

一方，行列式 $\alpha=|\alpha_k^i|=\pm 1$ なる直交1次変換

$$x'^i=\alpha_k^i x^k \tag{152}$$

に対して，P_i なる量は擬直交座標系の4元ベクトルの共変成分のように変換される．このことを証明するには先ず $\mathfrak{T}_{i\cdot}^{\cdot k}$ という量が，α_i^k が定数である場合の変換 (152) に対して，テンソルの混合成分のように変換することに注意する．さて管の中で成分が定数であるような4元ベクトル a^i を考えよう．そのときは，

$$a'^i=\alpha_k^i a^k \tag{153}$$

という成分もこの管内では定数である．そして

$$b^k=\mathfrak{T}_{i\cdot}^{\cdot k}a^i \tag{154}$$

という量は (147) により，直交1次変換 (152) で結ばれるあらゆる座標系内で

$$\frac{\partial b^k}{\partial x^k}=0 \tag{155}$$

という式を満足する．このように，第 VI 章では虚数時間表示を用いているという点を除けば，この場合も事情は §63 の場合と全く同じである．(VI. 31) を導いた場合と同じ論法で，この場合にも (155) から，$(b^4/c)dx^1dx^2dx^3=P_ia^i$ は直交変換 (152) に対して不変量であることを示すことができる．そして，このことは任意の一定なベクトル a^i について成り立たなければならないから，積分 P_i は4元ベクトルの共変成分のように変換されなければならない．このような事実と (151) から，管外では Lorentz 変換の形になるような任意の変換に

対して P_i は4元ベクトルのように変換されなければならないことがわかる.

$P_i=(P_{\iota}, -E/c)$ という量はこの弧立系の全運動量 $\boldsymbol{P}$ およびエネルギー E を表わす. $t_{i\cdot}^{4}=0$ のときには, この式は, § 114 で定常系についてえた式に一致する. 積分 (150) の最後の項は, 全運動量および全エネルギーに与える重力場の寄与であると解釈することができる. しかしすでに § 112 で述べたように, 物質による部分と重力による部分を一意的に分離することはできない. たとえ分離したとしてもその分け方は運動量やエネルギーを計算するのに用いた座標系によって変ってくる.

(147) は, この保存則の微分形式と解したい式である. そうすれば

$$\left.\begin{aligned} S^{\iota} &= -c\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)}(T_4^{\iota}+t_{4\cdot}^{\iota}) \\ h &= -\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)}(T_4^4+t_{4\cdot}^4) \\ g_{\iota} &= \frac{\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)}}{c}(T_{\iota}^4+t_{\iota\cdot}^4) \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

は $t_{i\cdot}^{k}=0$ の場合には (X. 45, 47) に帰着し, それぞれエネルギーの流束, エネルギー密度, 運動量密度と解することができる. ところがこの解釈は座標系のとり方に無関係ではないことに注意しなければならない. 何となれば $t_{4\cdot}^{\iota}$ や $t_{\iota\cdot}^{4}$, したがって, S^{ι} や g_{ι} は, 空間座標に簡単な変換を行っても空間ベクトルの成分のようには変換されない. h も同様な変換に対して一般に不変ではない. 物理的に満足な不変的意味を有するのは全エネルギーと, 全運動量に対する式 (150) だけである.

127. エネルギーおよび運動量密度に対する別の表式

(146) と (132) により, $t_{i\cdot}^{k}$ なる量の表式を陽表的に書下すことができる. 附録9に示すように, $\mathfrak{L}$ の g_k^{lm} に関する微係数は

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_k^{lm}} = \sqrt{(-g)}\left\{\Gamma_{lm}^{k}-\frac{1}{2}(\delta_l^k\Gamma_{mr}^{r}+\delta_m^k\Gamma_{lr}^{r})-\frac{1}{2}(g^{rs}\Gamma_{rs}^{k}-g^{rk}\Gamma_{rs}^{s})g_{lm}\right\} \tag{157}$$

で与えられる.

$$\Gamma_{rs}^{s}=\frac{1}{\sqrt{(-g)}}\frac{\partial\sqrt{(-g)}}{\partial x^r}=-\frac{1}{2}g_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^r}$$

であることに注意すれば, 簡単な計算の結果

$$\sqrt{(-g)}t_{i\cdot}^{k}=\frac{1}{2\kappa}\left\{\Gamma_{lm}^{k}\frac{\partial\{\sqrt{(-g)}g^{lm}\}}{\partial x^i}-\Gamma_{ms}^{s}\frac{\partial\{\sqrt{(-g)}g^{km}\}}{\partial x^i}-\delta_i^k\mathfrak{H}\right\} \tag{158}$$

がえられる.

Tolman が示したように†, $\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}$ は普通の発散の形を有する非常に有用な式

$$\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}=\frac{\partial s_i^{km}}{\partial x^m} \tag{159}$$

で表わすことができる.

(148), (13) および (146) から,

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}&=\sqrt{(-g)}(T_i^k+t_{i\cdot}^{k})=-\frac{\sqrt{(-g)}}{\kappa}M_i^k+\sqrt{(-g)}t_{i\cdot}^{k}\\&=\frac{1}{\kappa}\left\{-\sqrt{(-g)}\left(R_i^k-\frac{1}{2}Rg_i^k\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_k^{lm}}g_i^{lm}-\frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{L}\right\}\end{aligned} \tag{160}$$

がえられる. この式には λ 項が現われていない. (139) によりこの式はさらに

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}&=\frac{1}{\kappa}\left\{g^{kl}\left[\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_m^{il}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{il}}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_k^{lm}}g_i^{lm}-\frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{L}\right\}\\&=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[g^{kl}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_m^{il}}\right)\right]+\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_k^{lm}}g_i^{lm}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_m^{il}}g_m^{kl}-\right.\\&\qquad\left.-g^{kl}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{il}}-\frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{L}\right]\end{aligned} \tag{161}$$

のように変形される.

ところが, 附録 9 に示すように, 最後の項は恒等的に零である. ゆえに $\mathfrak{T}_{i\cdot}^{k}$ は

$$s_i^{km}=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_m^{il}}g^{kl} \tag{162}$$

という量の普通の発散として (159) の形に書くことができる.

さらに, 小さな λ-項を無視すれば, (148), (146), (142) および (159) から

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{i\cdot}^{i}&=\sqrt{(-g)}T_i^i+\sqrt{(-g)}t_{i\cdot}^{i}=\sqrt{(-g)}T_i^i+\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_i^{lm}}g_i^{lm}-4\mathfrak{L}\right)\\&=\sqrt{(-g)}T_i^i-\frac{\mathfrak{L}}{\kappa}=\frac{\partial s_i^{im}}{\partial x^m}\end{aligned} \tag{163}$$

が求められる.

この式からえられた $\mathfrak{L}$ を表わす式を (146) に代入すれば, $t_{4\cdot}^{4}$ したがって ‘エネルギーの密度’ の式

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{4\cdot}^{4}&=\sqrt{(-g)}T_4^4+\sqrt{(-g)}t_{4\cdot}^{4}=\sqrt{(-g)}\frac{1}{2}(T_4^4-T_1^1-T_2^2-T_3^3)+\\&\qquad+\frac{1}{2}\frac{\partial s_l^{lm}}{\partial x^m}+\frac{1}{2\kappa}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_4^{lm}}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^4}\end{aligned} \tag{164}$$

がえられる. この式を空間座標について積分したものが全エネルギーである.

† R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **35**, 875 (1930)

128. 重力質量および孤立系の全エネルギーおよび運動量

ここで孤立系というのは，この系から十分遠方で線素が (86′) なる形になるような準 Galilei 座標系 $x^i=(x, y, z, ct)$ の導入を許すような系のことである．したがってこの系の全エネルギー，運動量ベクトル P_i として，(150) および (159) から

$$P_i=\frac{1}{c}\int \mathfrak{T}_i^{.4}dx^1dx^2dx^3=\frac{1}{c}\int\frac{\partial s_i^{4\mu}}{\partial x^\mu}dx^1dx^2dx^3+$$
$$+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int s_i^{44}dx^1dx^2dx^3 \tag{165}$$

がえられる．右辺の第 1 項の積分は無限に遠方の球面

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\text{一定}$$

上の積分に変換することができる．したがって，これは十分遠方の，計量テンソルおよびその 1 階の微係数に依存する．ここで計量テンソルやその 1 階の微係数は時間には依存しない．孤立系では，ベクトル P_i は一定であるから，最後の積分も一定でなければならない．ところで実際問題として，孤立系ではこの積分の値が一定の速さで永久に変化しつゞけることは不可能なことであるから，この項の値は零でなければならない．ゆえに

$$P_i=\frac{1}{c}\int s_i^{4\mu}n_\mu d\sigma \tag{166}$$

がえられる．ここで $n_\mu=\dfrac{\partial r}{\partial x^\mu}=(x/r, y/r, z/r)$ は外向きの法線方向の単位ベクトルである．そして，この積分は無限の大きな球面（半径 $r=$一定）の上に亘って行われる．ところが (86′) によれば，遠方では

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1+\frac{2m}{r}, \qquad g_{44}=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)$$

で，他の成分はすべて零である．ゆえに，

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}=\delta_{ik}2m\frac{\partial(1/r)}{\partial x^l}=-\delta_{ik}(1-\delta_{l4})\frac{2m}{r^2}n_l \tag{167}$$

である．1 に比べて $\dfrac{m}{r}$ の程度の項を無視すれば，Christoffel 記号 Γ^i_{kl} にかかっている g^{ik} は G^{ik}，$\sqrt{-g}$ は 1 でおきかえてよい．したがってこのような近似では (162) および (157) から，

$$s_i^{4\mu}=\frac{1}{\kappa}\left\{\Gamma^\mu_{il}-\frac{1}{2}(\delta^\mu_i\Gamma^r_{lr}+\delta^\mu_l\Gamma^r_{ir})-\frac{1}{2}(G^{rs}\Gamma^\mu_{rs}-G^{r\mu}\Gamma^s_{rs})G_{il}\right\}G^{4l} \tag{168}$$

がえられる．$i\neq k$ のとき $G^{ik}=0$ であるから，この式に現われる Christoffel 記号は，(IX. 50) および (167) から容易に計算され，次のようになる．

$$\Gamma^{\mu}_{i4}=\delta^4_i\frac{m}{r^2}n_\mu,\qquad \Gamma^{s}_{rs}=-(1-\delta_{r4})\frac{2m}{r^2}n_r,$$

$$G^{rs}\Gamma^{\mu}_{rs}=G^{rr}\Gamma^{\mu}_{rr}=0 \tag{169}$$

そこで

$$s^{4\mu}_i=-\delta^4_i\frac{2m}{\kappa r^2}n_\mu \tag{170}$$

がえられる．そして (166) から

$$P_i=-\delta^4_i\frac{1}{c}\int\frac{2m}{\kappa r^2}\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]d\sigma=-\delta^4_i\frac{8\pi m}{\kappa c} \tag{171}$$

となる．

$P_i=(\boldsymbol{P},-E/c)$ であるから，無限の遠方で，線素が (86′) になるような座標系内では，全運動量は零になることがわかる．全エネルギーは，(88) により

$$E=-cP_4=\frac{8\pi m}{\kappa}=Mc^2 \tag{172}$$

となる．すなわち，無限の遠方におけるスカラー重力ポテンシャルからきめた重力質量 M と全エネルギーは Einstein の関係で結ばれていることになる．準 Galilei 座標の Lorentz 変換に対しては，P_i という量は，4元ベクトルとして変換される．したがって変換された系では $\boldsymbol{P}$ および E は，特殊相対論における運動している粒子の運動量およびエネルギーと同じ値を有することになる．

いま行った全エネルギーの計算では，エネルギーを純重力場を表わす量の函数として表わす式 (159) を用いた．実際には (166) 式に現われる無限の遠方における場の変数のみしか用いなかった．しかし場合によっては (164) 式を用いる方が便利である．定常または，準定常な系では，時間に関する微係数を無視することができるから，

$$E=-cP_4=-\int\mathfrak{T}_{4\cdot}^{\ 4}dx^1dx^2dx^3$$
$$=-\int\frac{1}{2}\sqrt{(-g)}(T^4_4-T^1_1-T^2_2-T^3_3)dx^1dx^2dx^3-\frac{1}{2}\int s^{i\mu}_i n_\mu d\sigma \tag{173}$$

がえられる．最後の積分は，遠方の球（半径 $r=$一定）について行われる．ゆえに，(162), (157), (169) および (170) により

$$s^{i\mu}_i=\frac{1}{\kappa}\left\{\Gamma^{\mu}_{il}-\frac{1}{2}(\delta^{\mu}_i\Gamma^{r}_{lr}+\delta^{\mu}_l\Gamma^{r}_{ir})-\frac{1}{2}(G^{rs}\Gamma^{\mu}_{rs}-G^{r\mu}\Gamma^{s}_{rs})G_{il}\right\}G^{il}$$
$$=-\frac{2m}{\kappa r^2}n_\mu=s^{4\mu}_4$$

がえられ，(166) と比べれば，(173) の最後の積分は $-E$ に等しいことがわかる．このようにして，E として簡単な式

$$E=-\int\sqrt{(-g)}(T_4^4-T_1^1-T_2^2-T_3^3)dx^1dx^2dx^3$$

$$=\int\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)}(T_1^1+T_2^2+T_3^3-T_4^4)dV, \tag{174}$$

がえられる．これは T_i^k が零でないような空間の部分についての積分，すなわち実際に物質のある場所について行われる積分である．(174) と (172) を比べればわかるように

$$\mu=\frac{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}{c^2}(T_1^1+T_2^2+T_3^3-T_4^4) \tag{175}$$

という量は，その系内における重力質量の密度と解される．μ は純空間的な変換に対しては，スカラーのように振舞うから，この解釈は，明確な物理的意義をもっている．

§124 で取り扱った静止している非圧縮性流体の場合にはに，(92′) より

$$T_1^1=T_2^2=T_3^3=\overset{0}{p},\qquad T_4^4=-\overset{0}{\mu}{}^0c^2$$

となる．

さらに $\lambda=0$ のときは，(103), (104), (102), (107) および (175) により

$$\sqrt{(1+2\chi/c^2)}=A-B\sqrt{(1-r^2/R^2)},$$

$$\sqrt{\gamma}=\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}},\qquad dV=\sqrt{\gamma}\,drd\theta d\phi=\frac{r^2\sin\theta drd\theta d\phi}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}}$$

$$\mu=(A-B\sqrt{(1-r^2/B^2)}(3\overset{0}{p}/c^2+\overset{0}{\mu}{}^0)=\overset{0}{\mu}{}^0\sqrt{(1-r^2/R^2)} \tag{176}$$

がえられる．ゆえに，この球状流体の重力を作る全重力質量は

$$M=\int\mu dV=4\pi\int_0^{r_1}r^2\overset{0}{\mu}{}^0dr=\frac{4\pi r_1^3}{3}\overset{0}{\mu}{}^0 \tag{177}$$

となる．これは (108) に一致する．非圧縮流体の場合には固有質量密度 $\overset{0}{\mu}{}^0$ は一定であるが，重力質量密度 μ は，(176) にしたがって r と共に減少する．

第 XII 章

一般相対論の実験的検証．宇宙論的問題

129. 重力によるスペクトル線のずれ

特殊相対論の結果が数多の実験によって非常な高精度で検証されているのに反し，一般相対論の実験的証明は，これまでに唯3つの場合だけに限られている．その訳は明らかである．それは太陽系内では Newton の重力論があらゆる重力現象に対して非常によい近似であったという事情によるものである．

一般相対性理論の真偽の判定になる最も基礎的な効果は，重力によるスペクトル線の**ずれ**の現象であって，これは等価原理からの直接の帰結である．(VIII. 100) によれば重力場内でスカラー重力ポテンシャルが χ であるような場所に静止している標準時計の進む速さと，われわれの座標系の時間 t を定義する座標時計の進む速さとの間には

$$d\tau_0=dt(1+2\chi/c^2)^{1/2} \tag{1}$$

という関係がある†．

さてスカラー・ポテンシャルが χ_1 の場所 p_1 に静止している原子が固有振動数 $\overset{0}{\nu}$ の光を放射している場合を考えよう．$\overset{0}{\nu}$ は局所静止系の時間のスケール，すなわち点 p_1 に静止する標準時計のスケールの単位時間に放出される波の数である．したがって同じ場所における座標時計の尺度で単位時間内に放出される波の数は

$$\nu_1=\overset{0}{\nu}(1+2\chi_1/c^2)^{1/2} \tag{2}$$

となる．何となれば，$\varDelta t=1$ に対応する標準時計の時間は $\varDelta\tau=(1+2\chi_1/c^2)^{1/2}$ だからである．重力場が定常である場合には，g_{ik} は t に無関係で，t のスケールで単位時間に任意の点 p_2 にある観測者に達する波の数は，時間的に一定で，同じスケールの単位時間内に p_1 から放射される波の数 ν_1 に等しくなければならない．したがって p_2 に静止する標準時計で測られたこの光の振動数は

---

† 等価原理からえられるこの式は，量子力学的な記述の妥当性についての Einstein と Bohr の論争でも大きな役割をした．これについては Albert Einstein: *Philosopher-Scientist*, Library of Living Philosophers, vol. vii, Evanston, 1949. 中の N. Bohr の論文を見よ．

$$\nu=\nu_1(1+2\chi_2/c^2)^{-1/2} \tag{3}$$

となるであろう．ここで χ_2 は場所 p_2 におけるスカラー・ポテンシャルである．何となれば p_2 にある標準時計のスケールでの単位時間は

$$\Delta t=(1+2\chi_2/c^2)^{-1/2}$$

に相当するからである．したがって (2) と (3) から

$$\nu=\overset{\circ}{\nu}\left(\frac{1+2\chi_1/c^2}{1+2\chi_2/c^2}\right)^{1/2} \tag{4}$$

がえられる．そこで，観測される振動数 ν は固有振動数 $\overset{\circ}{\nu}$ とは異なり，その差 $\Delta\nu=\nu-\overset{\circ}{\nu}$ は重力場が弱い場合には

$$\frac{\Delta\nu}{\overset{\circ}{\nu}}=\frac{\nu-\overset{\circ}{\nu}}{\overset{\circ}{\nu}}=\frac{\Delta\chi}{c^2} \tag{5}$$

で与えられる．ここで $\Delta\chi=\chi_1-\chi_2$ は，光が放射された場所と観測された場所における重力ポテンシャルの差である．

太陽の重力場の場合には (XI. 83, 88) により

$$\chi=-\frac{mc^2}{r}=-\frac{kM}{r}$$

である．ここで

$$M=1.983\times10^{33}\,\mathrm{gm} \tag{5'}$$

は太陽の質量である．ゆえに地球上で放射されるスペクトル線に比べて太陽の外側の層にある原子から放射されるスペクトル線のずれは，

$$\frac{\Delta\nu}{\overset{\circ}{\nu}}=-\frac{kM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{6}$$

となる．ここで r_1 と r_2 はそれぞれ太陽の表面および地球のいる距離の所における r の値である．これらの r の値は，空間が Euclid 的であると仮定し，光線が直線であるという仮定にもとづいて普通の天文学的方法で計算された距離とは，厳密には等しくない．しかし，その差が小さい上に，(6) という効果自身も小さいので，r の値の代りに天文学上の距離を用いても，その誤差はさらに高次の微少量になる．$r_2\gg r_1$ であるから，r_1 を普通の天文学上の太陽の半径の値

$$r_1=6.95\times10^{10}\,\mathrm{cm} \tag{6'}$$

とすれば，スペクトル線のずれとして

$$\frac{\Delta\nu}{\overset{\circ}{\nu}}=-2.12\times10^{-6} \tag{7}$$

がえられる．したがって，観測されるスペクトル線は，わずかではあるが赤い方にずれていなければならない．Einstein の予言したこの興味深い効果は†，太陽の場合の観測，およびそれよりもさらにずれが 30 倍も顕著なシリウスの伴星の場合について‡の観測された結果と満足すべき一致をみたのである．

130. 水星の近日点の移動

1個の粒子（惑星）が，Schwarzschild の外部解 (XI. 83, 88, 24) で記述される，粒子よりはるかに重い物体（太陽）の重力場内で行う運動について考えることにしよう．この場合には，計量テンソルは

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}=\frac{1}{1-\alpha/r},\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,\quad g_{44}=-\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\\ &g_{ik}=0\qquad (i\neq k),\qquad \alpha=\frac{2kM}{c^2}=\frac{\kappa Mc^2}{4\pi}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

で，したがって

$$\gamma_\iota=0,\qquad \gamma_{\iota\kappa}=g_{\iota\kappa},\qquad \chi=-\frac{c^2}{2}(1+g_{44})=-\frac{\alpha c^2}{2r}=-\frac{kM}{r}\tag{9}$$

である．

(X. 17, 17′) によれば，この粒子に作用する重力は

$$K_\iota=\left(-\frac{m\alpha c^2}{2r^2},0,0\right)$$

となる．ただしここで

$$m=\overset{\circ}{m}_0\Gamma=\frac{\overset{\circ}{m}_0}{\sqrt{(1-\alpha/r-u^2/c^2)}}\tag{10}$$

は惑星の相対論的質量である．速度の自乗は

$$u^2=\gamma_{\iota\kappa}u^\iota u^\kappa=\frac{\dot r^2}{1-\alpha/r}+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\dot\phi^2\tag{11}$$

とする．ここでドット (・) は時間変数 t に関する微分を表わす．さらに (X. 12) と (8) によれば，この粒子の運動量ベクトルは

$$p_\iota=\overset{\circ}{m}_0\Gamma\left(\frac{\dot r}{1-\alpha/r},r^2\dot\theta,r^2\sin^2\theta\dot\phi\right)\tag{12}$$

である．したがって運動方程式 (X. 15)

† A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **35**, 898 (1911)

‡ St. John, *Astrophys. Journ.* **67**, 195 (1928); W. Adams, *Proc. Nat. Acad*, **11**, 382 (1925): また E. F. Freundlich and W. Ledermann, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **104**, 1, 40 (1944), を見よ．

$$\frac{d_c p_\iota}{dt} \equiv \frac{dp_\iota}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\kappa\lambda}}{\partial x^\iota} u^\kappa p^\lambda = K_\iota \tag{13}$$

は，この場合

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma \dot{r}}{1-\alpha/r}\right) - \frac{1}{2}\left[-\frac{(\alpha/r^2)\Gamma}{(1-\alpha/r)^2}\dot{r}^2 + 2r\Gamma\dot{\theta}^2 + 2r\sin^2\theta\Gamma\dot{\phi}^2\right]$$
$$= -\Gamma\frac{\alpha c^2}{2r^2}, \tag{14 a}$$

$$\frac{d}{dt}(\Gamma r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\Gamma\dot{\phi}^2 = 0, \tag{14 b}$$

および

$$\frac{d}{dt}(\Gamma r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \tag{14 c}$$

となる．重力場は静的であるから，(X. 22) で定義されるこの粒子のエネルギーHは恒量である．ゆえに

$$\frac{H}{\overset{\circ}{m}_0 c^2} \equiv \Gamma\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right) \equiv \Gamma\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) = E \tag{15}$$

はこの運動方程式の中間積分である．Eは積分定数で，この系のエネルギーを $\overset{\circ}{m}_0 c^2$ で割ったものを表わしている．

(146) からわかるように

$$\theta = \frac{1}{2}\pi \tag{16}$$

も運動方程式のもう 1 つの解である．この問題の中心対称性から云って，中心を通る面ならどれを $\theta=\frac{1}{2}\pi$ の面に選んでもよい．したがって軌道は中心を通る平面上にあることがわかる．(16) を (14 c) に代入すれば，さらに次の積分がえられる．

$$\Gamma r^2\dot{\phi} = CE, \tag{17}$$

ここでCはもう 1 つの積分定数である．(15) により，(17) 式は

$$\frac{r^2\dot{\phi}}{1-\alpha/r} = C \tag{18}$$

と書くことができる．

さて，太陽に最も近い惑星である水星の場合でも α/r は非常に小さな量でその大きさは

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{2kM}{c^2 r} \approx 5\times 10^{-8} \tag{19}$$

程度である．他の惑星については α/r はもっと小さい．したがって事実上す

べて，重力場は弱い場として取り扱ってよい．そして $u^2/c^2 \ll 1$ であるから，第1近似としてHの近似式 (X. 25) を (15) の場合に用いてもよい．さらに (11) と (16) を用いれば，この近似で，(15) として

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-\frac{kM}{r}=\text{一定} \tag{20}$$

がえられる．これが Newton の理論における普通のエネルギーの式である．同じ近似で (18) は

$$r^2\dot{\phi}=C \tag{21}$$

となる．これは角運動量の保存を表わしている．したがって (20) と (21) で定まる軌道は楕円

$$r=\frac{a}{1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)} \tag{22}$$

である．ε は離心率で

$$r_1=\frac{a}{1-\epsilon}, \qquad r_2=\frac{a}{1+\varepsilon} \tag{23}$$

はそれぞれその惑星が遠日点および近日点にあるときの r の値である．水星の場合には

$$\epsilon=0.2056, \qquad a=5.786\times10^{12}\,\mathrm{cm} \tag{24}$$

である．場がもっと強いときは，(20) は，エネルギー方程式 (15) で置きかえらなければならぬし，(21) の代りに積分 (18) を用いることになる．ところが (18) の左辺は一般には角運動量と解釈することができない，なぜならばこの角運動量の定義に現われる‘動径’は Euclid 空間の場合にのみ明確な意味をもつに過ぎないからである．

この一般の場合について軌道を決定するため r の代りに変数 $\rho=1/r$ を導入する．そうすれば (18) から

$$\dot{r}=\frac{dr}{d\phi}\dot{\phi}=\frac{dr}{d\rho}\frac{d\rho}{d\phi}\frac{C}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)=-\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)C(1-\alpha\rho) \tag{25}$$

がえられる．そして，(11), (16), (18) および (25) からこの粒子の速度として

$$u^2=C^2(1-\alpha\rho)\left[\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2+\rho^2-\alpha\rho^3\right] \tag{26}$$

が求められる．

エネルギーの式 (15) に Γ を表わす式 (10) を代入し，これを2乗すれば

$$(1-\alpha\rho)^2=E^2\left[1-\alpha\rho-\frac{u^2}{c^2}\right] \tag{27}$$

がえられる．u^2 に (26) を代入し $\left(\dfrac{d\rho}{d\phi}\right)^2$ について解けば，この粒子の軌道を

きめる微分方程式として，

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2=A+B\rho-\rho^2+\alpha\rho^3 \tag{28}$$

がえられる．ここで A, B は定数である．(19) によりこの式の最後の項は ρ^2 の項に比べて非常に小さい．もしこの項を省略するならば (28) は Newton の方程式 (20), (21) からえられる式

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2=A+B\rho-\rho^2 \tag{29}$$

になる．(22) がこの近似方程式の解であることは容易にわかる．そして遠日点および近日点に対応する ρ の極小および極大値は，2 次方程式

$$A+B\rho-\rho^2=0 \tag{30}$$

の根としてえられる．空間の有限領域内におさまっているような軌道についてはその 2 つの根 ρ_1 および ρ_2 は実根で正でなければならない．このとき (23) により

$$\rho_1=\frac{1-\epsilon}{a},\qquad \rho_2=\frac{1+\epsilon}{a} \tag{31}$$

がえられる．そこで (29) は

$$\frac{d\rho}{d\phi}=\pm\sqrt{\{(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)\}} \tag{32}$$

と書くことができる．そして ρ が ρ_1 から ρ_2 まで増加する間の ϕ の増分 $\phi_2-\phi_1$ は積分

$$\phi_2-\phi_1=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{\{(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)\}}}=\sin^{-1}\frac{\rho-\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)}{\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)}\Bigg|_{\rho_1}^{\rho_2}=\pi \tag{33}$$

からえられ，これは解 (22) と符合している．

さて今度は厳密な方程式 (28) の場合にもどろう．(28) の右辺は 3 次の多項式であり，$\dfrac{d\rho}{d\phi}=0$ とおいてえられる方程式は 3 つの根 ρ_1, ρ_2, ρ_3 を有することがわかる．α が小さなときは，これらのうちの 2 つの根，例えば ρ_1 と ρ_2 は，(30) の根 (31) に近似的に等しくなければならない．そして

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=\frac{1}{\alpha} \tag{34}$$

であるから，ρ_3 は α が小さな値のとき非常に大きくなければならない．したがって，この場合にも ρ_1, ρ_2 という根は，この惑星の軌道における ρ の極小および極大値を表わすことになろう．そして今度は (32) の代りに

$$\frac{d\rho}{d\phi}=\pm\sqrt{\{\alpha(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)\}}$$

$$=\pm\sqrt{\left\{(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)[1-\alpha(\rho_1+\rho_2)]\left[1-\frac{\alpha\rho}{1-\alpha(\rho_1+\rho_2)}\right]\right\}} \tag{35}$$

となる．ただしここで (34) からえられる関係

$$\alpha\rho_3=1-\alpha(\rho_1+\rho_2)$$

を用いた．$\alpha\rho$ および $\alpha(\rho_1+\rho_2)$ は小さな量であるから，α に関する第1近似として

$$d\phi=\pm\frac{d\rho}{\sqrt{\{(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)\}}}\left[1+\frac{\alpha(\rho_1+\rho_2)}{2}\right]\left[1+\frac{\alpha\rho}{2}\right]$$

がえられ，ρ が ρ_1 から ρ_2 まで増す間における角 ϕ の増分は

$$\phi_2-\phi_1=\left[1+\frac{\alpha(\rho_1+\rho_2)}{2}\right]\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{1+\alpha\rho/2}{\sqrt{\{(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)\}}}d\rho$$

$$=\left[1+\frac{\alpha(\rho_1+\rho_2)}{2}\right]\times\left|-\frac{\alpha}{2}\sqrt{\{(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)\}}+\left(1+\frac{\alpha}{4}(\rho_1+\rho_2)\right)\sin^{-1}\frac{\rho-\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)}{\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)}\right|_{\rho_1}^{\rho_2}$$

となる．ゆえに相ついで起る2回の近日点の間の ϕ の差は

$$2(\phi_2-\phi_1)=2\left(1+\frac{\alpha(\rho_1+\rho_2)}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{4}(\rho_1+\rho_2)\right)\pi$$

$$=2\pi\left(1+\frac{3\alpha}{4}(\rho_1+\rho_2)\right) \tag{36}$$

となり，これは (33) からえられる 2π と

$$\varDelta\phi=\frac{3\pi\alpha}{2}(\rho_1+\rho_2) \tag{37}$$

だけ異なる．この結果は，惑星が1公転するごとに，その近日点がこれだけ前進することを意味しているものと解される．これは非常に小さな量であるから，ρ_1 と ρ_2 にその近似値 (31) を代入してもよい．水星の場合に，(24) を用いて計算すれば，近日点の前進は，100 年間に角度で 42.9″ となる．この結果は，実際観測された値から，他の惑星の影響による分を差引いたものとよく一致している†．その他の惑星については，Einstein の重力論による近日点の前進は，小さすぎて，確実に観測することはできない．

† J. Chazy, *C. R.* **182**, 1134 (1926)

線素として Schwarzschild の型 (XI. 83) の代りに，‘等方’座標 (XI. 85) に相当する (XI. 86) の型を用いて以上の計算をすることもできる．この座標系では，運動方程式はもっと複雑になってしまうが，近日点の移動に関する最終的な結果は，もちろん，(37) で与えられるものに一致する．

131. 重力場による光の屈折

一般相対性理論の真偽の判定になる第 3 の効果は太陽の重力場内における光線の屈折である．場は静的であるから，光線の径路は，§117 の考察により，Fermat の原理，すなわち，(X. 100, 99, 94) 式

$$\frac{d_c u_\iota}{d\lambda} \equiv \frac{d}{d\lambda}(g_{\iota\kappa}\dot{x}^\kappa) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\iota}\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = -\frac{1}{w^3}\frac{\partial w}{\partial x^\iota} \tag{38}$$

$$\dot{x}^\iota = \frac{dx^\iota}{d\lambda}, \quad w = c\Big/\sqrt{\left(1+\frac{2\chi}{c^2}\right)}, \quad \frac{d\sigma}{d\lambda}w = 1 \tag{39}$$

によって定まる．

したがって，(8) および (9) で記述される場については

$$w = c\Big/\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}, \tag{40}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{w^2}{c^2} \equiv \dot{r}^2 + (r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) = \frac{1}{c^2} \tag{41}$$

となり，$\iota=2, 3$ に対する (38) の式は

$$\frac{d}{d\lambda}(r^2\dot{\theta}) - \frac{1}{2}\cdot 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0, \qquad \frac{d}{d\lambda}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \tag{42}$$

となる．(42) を見れば

$$\theta = \frac{1}{2}\pi, \qquad r^2\dot{\phi} = C \tag{43}$$

がその積分であることがわかり，これにより (41) は下のようになる．

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) \equiv \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{C^2\alpha}{r^3} = \frac{1}{c^2}. \tag{44}$$

新しい変数 $\rho = \dfrac{1}{r}$ を導入すれば

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\lambda} = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)C\rho^2 = -C\frac{d\rho}{d\phi}$$

であるから (44) は

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{c^2C^2} - \rho^2 + \alpha\rho^3 \equiv \frac{1}{\Delta^2} - \rho^2 + \alpha\rho^3 \tag{45}$$

となる．ただし，$\Delta = cC$ とおいた．

さて，無限の遠方 ($\rho=0$), $\phi=0$ の方向からくる光線について考えよう．(45) で先ず小さな項 $\alpha\rho^3$ を省略して考えれば，(45) 式は容易に積分され

$$\phi=\int_0^\rho \frac{\Delta d\rho}{\sqrt{\{1-(\Delta\rho)^2\}}}=\sin^{-1}(\Delta\rho)\Big|_0^\rho$$

$$\rho=\frac{1}{\Delta}\sin\phi, \qquad r=\frac{\Delta}{\sin\phi} \tag{46}$$

がえられる．Euclid 平面内でこの軌道の描像を描いてみると，ここでは r, ϕ は通常の極座標であるから，(46) という曲線は，$\phi=\frac{1}{2}\pi$ で中心からの距離 Δ の点を通り，$\phi\to\pi$ でふたたび無限の遠方にいく直線を表わす．

さて次に厳密な方程式 (45) の場合には

$$\frac{d\rho}{d\phi}=\left\{\frac{1}{\Delta^2}-\rho^2+\alpha\rho^3\right\}^{1/2}=\frac{1}{\Delta}(1-\sigma^2)^{1/2} \tag{47}$$

と書くことができる．ただしここで ρ の代りに次の新しい変数を導入した．

$$\sigma=\Delta\rho(1-\alpha\rho)^{1/2} \tag{48}$$

$\alpha\rho$ は小さいから，(48) を α について1次の項までに止めてよい．すなわち

$$\sigma=\Delta\rho\left(1-\frac{\alpha\rho}{2}\right), \qquad \Delta\rho=\sigma\left(1+\frac{\alpha\rho}{2}\right)=\sigma\left(1+\frac{\alpha\sigma}{2\Delta}\right). \tag{49}$$

$$\Delta d\rho=d\sigma\left(1+\frac{\alpha\sigma}{\Delta}\right)$$

であるから，(47) から

$$\phi=\int_0^\rho \frac{\Delta d\rho}{(1-\sigma^2)^{1/2}}=\int_0^\sigma \frac{d\sigma(1+\alpha\sigma/\Delta)}{(1-\sigma^2)^{1/2}}=\sin^{-1}\sigma-\frac{\alpha}{\Delta}(1-\sigma^2)^{1/2}+\frac{\alpha}{\Delta} \tag{50}$$

となる．

(47) によれば光線が太陽に最も近づく点の ρ の値，すなわち ρ の極大値 ρ_m は，$\sigma=1$ に対応する．これに対応する角 ϕ は

$$\phi_m=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{\Delta} \tag{51}$$

となる．よって上に述べた Euclid 描像では，曲線 (50) は，全体として

$$\psi=2\left(\phi_m-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\alpha}{\Delta} \tag{52}$$

だけ屈折する，わずかに曲っている曲線を表わしている．これが地球上の観測者に認められる太陽の重力場内における光線の屈折である．この場合，地球上の観測者は太陽から無限の遠方に居るものと見なしてよい．太陽に最も近づく点の ρ の値として，(49) から

$$\rho_m=\frac{1}{\Delta}\left(1+\frac{\alpha}{2\Delta}\right)$$

をえる．ゆえに α に関する2次の項を無視すれば (52) は

$$\phi=2\alpha\rho_m=\frac{2\alpha}{r_m}=\frac{4kM}{c^2r_m}. \tag{53}$$

太陽の縁をすれすれに通る光線について (5′) と (6′) から計算すれば，屈折の角として1.75″ がえられる．Einstein† が予言したこの効果は，皆既日蝕の際，太陽の縁近くを通る星の見掛の位置について検討された．そして Einstein の式 (52) と観測結果との一致は満足すべきものであった‡．しかし，この効果はちょうど実験誤差限界内にあるので，数値的な一致についてはあまり重きを置くことはできない．

この屈折 (52) は，一部は (40) で表わされる光の速度の変化によるものであり，一部は，空間幾何学が非 Euclid 的であることによるものである．空間がもし Euclid 的であるとすれば (44) は

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2=\frac{1}{c^2(1-\alpha/r)} \tag{54}$$

でおきかえなければならぬ．そのときは (45) の代りに

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2=\frac{1}{\Delta(1-\alpha\rho)}-\rho^2$$

がえられる．これを積分すれば α の第1近似で

$$\phi=\alpha/\Delta, \tag{55}$$

となり，(52) の値の半分の値しかえられない．

他方，光の速度は定数 c とし，空間幾何学が (9) と (8) で定義される計量テンソル γ_{ik} で与えられるものとすれば光線の径路は，(38) による‘最も真直な’線である．この場合には (44) と (45) 式は，それぞれ

$$\frac{\dot{r}^2}{1-\alpha/r}+r^2\dot{\phi}^2=\frac{1}{c^2}, \qquad \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2=(1-\alpha\rho)\left(\frac{1}{\Delta^2}-\rho^2\right)$$

となる．後の方の式を積分すれば，屈折角として α の1次の近似で

$$\phi=\alpha/\Delta \tag{56}$$

がえられる．この2つの効果 (55) と (56) を加え合せてちょうど Einstein の式 (52) がえられるのである．

---

† A. Einstein, *Berl. Ber.*, p. 831 (1915): *Ann. d. Phys.* **49**, 769, § 22 (1916)

‡ W. W. Campbell and R. Trumpler, *Lick Observ. Bull.* **11**, 41 (1923): **13**, 130 (1926)

このように一般相対性理論の直接実験による検証は非常に少い．しかし，一般相対性理論は自然な理論であるばかりでなく，実験によって非常によく基礎づけられた特殊相対論の妥当な一般化でもある．さらに Einstein の重力論は第1近似で Newton の理論を含んでいるので，Newton の理論からの結果を実証するあらゆる天文学上の観測は，ある意味で一般相対性理論を支持していると見なすこともできる．Newton と Einstein の理論の差が上に述べた3つの小さな効果のみに現われるだけであるということは，Newton の理論が，太陽系内であらゆる重力現象に対して非常によい近似であることを表わしている．しかし，宇宙の大部分の構造や運動を問題にする宇宙論上の諸問題では，この2つの重力論は非常にちがった結果を導くであろうことが期待される．そして，その内部矛盾のないことや，その基本原理の一般的なことから云って，Einstein の重力論が，このような難問題を取り扱う上に，より安全な指針となるものであろうことが期待されるのである．

132. 宇宙論におけるいろいろな模型

Newton の重力論を宇宙全体に適用すると，いろいろな困難に遭遇することがずっと以前から†知られていた．Einstein の重力論は，宇宙論的なひろがりをもつ系に対して Newton の理論と相当違った結果を与えるであろうことが期待されるので，宇宙を全体として取り扱う上に，一般相対性理論が与える新しい可能性をしらべてみることは，非常に興味あることである．この問題は，一般相対性理論の展開後間もなく Einstein によってとり上げられ‡，それ以後，非常に多くの学者達の数多の研究の対象となったのである．しかしわれわれはここでこれらの研究のすべてについて詳しい解説をする意図はない．ここでは，はじめ Einstein§ および de Sitter‖ が提起した宇宙の一様な静的模型についてのべるだけにしておこう．

今までに考察されているあらゆる宇宙の模型は，大きなスケールに立ってみるとき，宇宙は空間的に一様かつ等方であるという仮定に立脚している．実際は，宇宙内における物質は，部分的にあつまって星となり，これがわれわれの銀河系と同じ性質の星雲として集中する傾向をもっているのである．しかし，

† C. Neumann, *Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Zn Leipzig, Math. nat. Kl.* **26**, 87 (1874): H. v Seeliger, *Astron, Nachr,* **137**, p. 129 (1895); *Münch, Ber.* **26**, 373 (1896)

‡ A. Einstein, *Berl. Ber.*, p. 142 (1917): *Ann. d. phys.* **55**, 245 (1918)

§ A. Einstein, *Berl. Ber.*, p. 142 (1917)

‖ W. de Sitter, *Amst, Proc.* **19**, 1217 (1917); **20**, 229 (1917)

今日望遠鏡によって到達できる限りの空間では，これらの星雲は全体として，かなり一様に分布しているように思われる．そして，大きなスケールでの宇宙の性質を記述するのに物質分布が一様な完全流体であるとして取り扱うことができるという仮定は，出発点としては自然であるように思われる．Einstein と de Sitter が提起した模型では，さらに，宇宙は**静的**な系であると見なされている．静的というのは線素が静的で球対称な型 (XI. 63)

$$ds^2=a(r)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)-b(r)c^2dt^2 \tag{57}$$

となるような座標系 $x^i=(r,\theta,\phi,ct)$ が導入できるということである．ここで a, b は r のみの函数である．宇宙は一様であると仮定しているので，空間内の勝手な 1 点を空間座標の原点 $r=0$ と考えてよい．

さて，これらの函数 $a(r)$, $b(r)$ と宇宙内の固有質量密度 $\overset{0}{\mu}{}^0$ および固有圧力 $\overset{0}{p}$ とは完全流体についての場の方程式 (XI. 96, 94) によって結ばれている．すなわち

$$\frac{d\overset{0}{p}}{dr}+(\overset{0}{\mu}{}^0c^2+\overset{0}{p})\frac{b'}{2b}=0, \tag{58}$$

$$\frac{b'}{abr}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\lambda=k\overset{0}{p}, \tag{59 a}$$

$$\frac{a'}{a^2r}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)-\lambda=\kappa\overset{0}{\mu}{}^0c^2. \tag{59 b}$$

仮定により模型は一様であるから，$\overset{0}{p}$ および $\overset{0}{\mu}{}^0$ は定数である．そこで次にこれらの方程式の可能な正則な解を捜すことにしよう．

$d\overset{0}{p}/dr=0$ であるから，(58) は

$$(\overset{0}{\mu}{}^0c^2+\overset{0}{p})b'=0 \tag{60}$$

となる．このことから

$$b'=0 \tag{61}$$

であるか，あるいは，

$$\overset{0}{\mu}{}^0c^2+\overset{0}{p}=0 \tag{62}$$

でなければならないことになる．この 2 つの場合がそれぞれ Einstein の解と de Sitter† の解に導くのである．

133. Einstein の宇宙

(61) という条件で特徴づけられる解は b が一定であることに対応する．そし

† R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad.* **15**, 297 (1929)

て時間のスケールを適当に選んでこの一定値が1であるとすることができる，すなわち

$$b=1. \tag{63}$$

(61) を (59 a) に代入し，これを a について解けば

$$a=\frac{1}{1-(\lambda-\kappa\overset{\circ}{p})r^2}=\frac{1}{1-r^2/R^2} \tag{64}$$

がえられる．ただしここで

$$\frac{1}{R^2}=\lambda-\kappa\overset{\circ}{p} \tag{65}$$

により新しい定数 R を導入した．さらに (64) と (59 b) を用いて

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{2}\kappa(\overset{\circ}{\mu^0}c^2+\overset{\circ}{p}) \tag{66}$$

がえられる．これと (65) から

$$\lambda=\frac{1}{2}\kappa(\overset{\circ}{\mu^0}c^2+3\overset{\circ}{p}) \tag{67}$$

という関係が成立する．

さて $\overset{\circ}{\mu^0}$ という量はその性質上正の量であり，たとえ流体に凝集力があって，$\overset{\circ}{p}$ の値が負になるような場合であっても，普通に考えうる物質の性質としては $\overset{\circ}{p}$ の大きさは $\overset{\circ}{\mu^0}c^2$ に比べて遙かに小さいものと考えられる．したがって λ も $1/R^2$ も正でなければならない．よって R は長さの次元を有する実数である．

Einstein の最初の論文では，宇宙における物質は，相互に作用及ぼし合わないで，圧力は全然存在しないと仮定している．この場合には，(66) と (67) から

$$\lambda=\frac{1}{R^2}=\frac{\kappa c^2}{2}\overset{\circ}{\mu^0} \tag{68}$$

がえられる．ところが，もし，宇宙が主として輻射で満たされているものと仮定すれば，(VII. 145) により

$$\overset{\circ}{p}=\frac{\overset{\circ}{\mu^0}c^2}{3} \tag{69}$$

がえられる．これから

$$\lambda=\frac{3}{2}\frac{1}{R^2}=\kappa\overset{\circ}{\mu^0}c^2 \tag{70}$$

なる関係がえられる．Hubble† の推定によると，実際の宇宙における物質の平均密度の下限は

† E. Hubble, *Astrophys. Journ.* **79**, 8 (1934)

$$\overset{0}{\mu}{}^0 \approx 10^{-30}\cdot \mathrm{gm/cm^3}.$$

の程度である．そのときは (68) と (XI. 24) から

$$\left.\begin{aligned} &\lambda=\frac{1}{R^2}\approx 9\times 10^{-58}\ \mathrm{cm}^{-2}. \\ &\text{したがって}R\text{の上限として} \\ &R\approx 3\times 10^{28}\ \mathrm{cm.}\approx 3\times 10^{10}\ \text{光年} \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

がえられる．

(57), (63) および (64) によれば，Einstein 宇宙の線素は

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-r^2/R^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)-c^2dt^2 \tag{72}$$

となる．

$$\frac{r^2}{R^2}\ll 1 \tag{73}$$

が成立する空間領域では，この線素は特殊相対性理論の場合に一致する．(71) で与えた λ や R の値については，海王星までの距離 $r\approx 10^{14}$ に対しても

$$\frac{r^2}{R^2}\approx\left(\frac{10^{14}}{10^{28}}\right)^2=10^{-28}$$

となり，太陽系の内部では (73) という条件は満足されていることがわかる．このことが惑星運動に関するあらゆる重力現象の取り扱う際に λ-項を省略してもよいことの根拠である．さらにまた，重力をおよぼす物体から十分離れたところにある慣性系に対して特殊相対性理論の線素が通用することが実験的によく知られているが，Einstein の模型によれば，このことは遠方の天体が一様な静的分布をしていることの結果であることがわかる．

条件 (73) が満足されていないような宇宙の大部分の場所では，空間の計量テンソルおよび力学的重力ポテンシャルとして，(72) から

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{11}=\frac{1}{1-r^2/R^2},\qquad \gamma_{22}=r^2,\qquad \gamma_{33}=r^2\sin^2\theta \\ &\gamma_{\iota\kappa}=0\ \ (\iota\neq\kappa),\qquad \gamma=|\gamma_{\iota\kappa}|=\frac{r^4\sin^2\theta}{1-r^2/R^2} \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

$$\gamma_\iota=0,\qquad \chi=0 \tag{75}$$

がえられる．空間的線素

$$d\sigma^2=\frac{dr^2}{1-r^2/R^2}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{76}$$

は $r<R$ なる場合に限り実数となる．これが Einstein 宇宙における物理的な空間のひろがりを定義するものである．この宇宙の全体積は

$$V=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{\gamma}\,drd\theta d\phi=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{r^2\sin\theta drd\theta d\phi}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}}$$

$$=4\pi\int_0^R\frac{r^2dr}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}}=\pi^2R^3 \tag{77}$$

で，原点から最も遠い距離は

$$L=\int_0^R\frac{dr}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}}=R\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}=R\sin^{-1}\xi\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi R}{2} \tag{78}$$

である．

また，われわれの準拠系では物質が静止しているので，(X. 56) によりこの宇宙内にある物質の全固有質量を求めれば

$$M_0=\int\mathring{\mu}^0 d\mathring{V}^0=\mathring{\mu}\int d\mathring{V}=\pi^2R^3\mathring{\mu} \tag{79}$$

となり，原点と物質の平均距離は V

$$\frac{L}{2}\approx R$$

の程度である．(79) および (68)，または (70) により

$$\lambda R^2\approx 1,\qquad \frac{M_0\kappa c^2}{4\pi R}\approx 1 \tag{80}$$

がえられる．この関係は，§120 において行った遠心力や Coriolis の力の本性に関する考察から示唆される関係 (XI. 40, 50) に一致している．

(74)-(79) で定義される空間幾何学は，いわゆる**楕円型**である．しかしながら，線素 (76) は，宇宙全体の幾何学について，少しちがった解釈を許すのである．もし

$$\left.\begin{aligned}y_0&=R\sqrt{(1-r^2/R^2)}\\ y_1&=r\cos\theta\\ y_2&=r\sin\theta\cos\phi\\ y_3&=r\sin\theta\sin\phi\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

によって新しい 4 つの変数 y_0, y_1, y_2, y_3 を定義すれば

$$y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2=R^2 \tag{82}$$

となり，線素 (76) は Euclid 型

$$d\sigma^2=dy_0^2+dy_1^2+dy_2^2+dy_3^2 \tag{83}$$

になる．このことは Einstein 宇宙の物理空間が，直交座標系 (y_0, y_1, y_2, y_3) を有する 4 次元 Euclid 空間における半径が R の 3 次元的球面 (82) であると

いう解釈を許す．

球面 (82) の上に極座標 $R,\ \psi,\ \theta,\ \phi$ を

$$\left.\begin{aligned} &y_0=R\cos\psi, \qquad y_1=R\sin\psi\cos\theta \\ &y_2=R\sin\psi\sin\theta\cos\phi, \qquad y_3=R\sin\psi\sin\theta\sin\phi \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

によって定義すれば

$$r=R\sin\psi \tag{85}$$

がえられる．そして球面上の各点に対して区間

$$0\leqslant\psi\leqslant\pi, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \qquad 0\leqslant\phi<2\pi \tag{86}$$

内の変数の値 (ψ,θ,ϕ) が対応している．

(84) を (76) に代入すれば線素は，

$$d\sigma^2=R^2(d\psi^2+\sin^2\psi d\theta^2+\sin^2\psi\sin^2\theta d\phi^2) \tag{87}$$

となる．そしてこの座標系では

$$\gamma=|\gamma_{ik}|=R^6\sin^4\psi\sin^2\theta$$

であるから，宇宙の全体積として

$$\begin{aligned} V&=\int_0^\pi d\psi\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\phi R^3\sin^2\psi\sin\theta=4\pi R^3\int_0^\pi\sin^2\psi d\psi \\ &=2\pi^2R^3 \end{aligned} \tag{88}$$

がえられる．このように，このいわゆる**球型**空間内の体積は，対応する楕円型空間内の体積の 2 倍に等しい．このことは (85) と (86) から明らかなことである．それは楕円空間は，$0\leqslant\psi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ という半球しか覆っていないからである． 換言すれば楕円空間では，球面上のある点とその対蹠点とは 1 つの点として数えられているのである．

同様に Einstein の閉じた球型の宇宙を 1 周する全距離は (87) から

$$L=2R\int_0^\pi d\psi=2\pi R \tag{89}$$

となる．これは球面 (82) の '大円' にそって進み，元の出発点に戻るまでに旅行すべき距離である．

(80) という関係は Einstein の球型宇宙についても成り立つ．

力学的ポテンシャル (γ_i, χ) は零であるから， 粒子に作用する重力は零であり，さらに，準拠系は変形しないから，**この宇宙では自由粒子は一定の速度で，この宇宙の幾何学による最も真直な線に沿って運動する**ことになる (§ 110 の終り参照)． Einstein の宇宙では，このように一般化された形の慣性の法則が成り立つ．したがって静止する自由粒子はいつまでも静止し続ける．

(X. 94) および (75) によれば光の速度は一定で c に等しい．したがって (r, θ, ϕ) 点に静止する星が時刻 t_1 に放射した光は，原点 $r=0$ に時刻

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{c}\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}} = t_1 + \frac{R}{c}\sin^{-1}\frac{r_1}{R} \tag{90}$$

に到着することになる．そして r_1 は一定だから微分して

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \tag{91}$$

がえられる．このように，2つの波の山が相ついで原点に到着する時間の間隔 Δt_2 は，それが放出された際の時間間隔 Δt_1 に等しいことになる．さらに $\chi=0$ であるから，時間変数 t は静止している標準時計の示す時間に等しい．したがって (91) は，原点に在る観測者が測定した光の振動数が，静止している星が放出した光の固有振動数に等しいことを意味している．

したがって，遠方にある星雲の勝手な運動による小さな Doppler 効果のほかには，星雲の発するスペクトル線に系統的な偏移が期待できないことになる．ところが，実際の宇宙では，Hubble と Humason† の研究が示すように，星雲からきた光には一定の赤方偏移が起っており，その距離に比例して偏移が増している．このことは Einstein の模型が多くの満足すべき特色を有するにも拘らず実際の宇宙の近似的な記述にしかすぎることを表わしている．

134. de Sitter の宇宙

Einstein の模型に導く条件 (61) に対応する解のほかに，条件 (62) すなわち．

$$\overset{0}{\mu}{}^0 c^2 + \overset{0}{p} = 0 \tag{92}$$

からえられる．静的で一様かつ等方なる場の一般式の解が存在する．(59 a) と (59 b) を加え合せれば，この場合

$$(ab)' = \kappa(\overset{0}{\mu}{}^0 c^2 + \overset{0}{p})a^2 br = 0,$$

すなわち　$ab = $ 定数

がえられる．

時間変数のスケールを変更することにより，この定数を 1 とすることが許される．すなわち b は a の逆数である．

$$ab = 1. \tag{93}$$

$y = 1/a$ を新しい変数にとれば，(59 b) は

† E. Hubble, *Proc. Nat, Acad*, **15**, 168 (1929): E. Hubble and M. L. Humason, *Astrophys. Journ.* **74**, 43 (1931)

$$(yr)' \equiv y'r + y = +1 - (\lambda + \kappa \overset{0}{\mu}{}^{0} c^2) r^2$$

となる．これを積分して

$$yr = r - \frac{(\lambda + \kappa \overset{0}{\mu}{}^{0} c^2)}{3} r^3 + 定数 \tag{94}$$

がえられる．

y は $r=0$ で正則であるから，(94) の右辺の定数は零でなければならない．したがって (93) と (94) から

$$b = \frac{1}{a} = y = 1 - \frac{r^2}{R^2} \tag{95}$$

がえられる．ただしここで

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\lambda + \kappa \overset{0}{\mu}{}^{0} c^2}{3} \tag{96}$$

とおいた．

(95) を (57) に代入すれば de Sitter の線素

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 dt^2 \tag{97}$$

がえられる．

この場合にも空間的計量テンソルの成分は (74) で与えられる．すなわち，少くとも λ が正であると仮定する限り，de Sitter 宇宙の空間幾何学は，Einstein の模型の場合と同じである．ところがこの場合には，力学ポテンシャルは零ではなくて

$$\gamma_\iota = 0, \qquad \chi = -\frac{r^2 c^2}{2R^2} \tag{98}$$

である．したがって自由粒子には r に比例する重力

$$\boldsymbol{K} = -m \operatorname{grad} \chi = m\left(\frac{rc^2}{R^2}, 0, 0\right) \tag{99}$$

が作用する．このことは de Sitter 空間では，空間の広い領域に対しては慣性の法則が成り立っていないことを意味している．

$$\frac{r^2}{R^2} \ll 1$$

なる領域内でのみ，線素 (97) は特殊相対性理論の場合に帰着し，慣性の法則が近似的に成り立っているのである．

したがって自由粒子の運動方程式は，重力の式 (99) を用いた (X. 15) となる．しかし，§113 で述べたように適当な時空座標を導入して，力学ポテンシャルが消去できることを利用するのが便利である．それには変換

$$\left.\begin{aligned} r' &= \frac{r}{\sqrt{(1-r^2/R^2)}} e^{-ct/R} \\ t' &= t + \frac{R}{2c} \ln\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ \theta' &= \theta, \qquad \phi' = \phi \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

によって定義される新しい変数 (r', θ', ϕ', t') を用いればよい. Lemaître† と Robertson‡ が独立に示したように, この変換により線素は次の形になる.

$$ds^2 = e^{2ct'/R}(dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + r'^2 \sin^2\theta' d\phi'^2) - c^2 dt'^2. \tag{101}$$

このことは直接計算によってもたしかめることは容易である. 最後に, Euclid 空間における直交座標と極座標の普通の関係式により, r', θ', ϕ' に対応する新しい変数 x', y', z' を導入すれば, (101) は

$$ds^2 = e^{2ct'/R}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) - c^2 dt'^2 \tag{102}$$

と書くことができる. この新しい座標 x', y', z' は $-\infty$ から $+\infty$ までのすべての値をとることができる.

この座標系では

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \frac{1}{\gamma^{11}} = \frac{1}{\gamma^{22}} = \frac{1}{\gamma^{33}} = e^{2ct'/R} \\ &\gamma_{\iota\kappa} = \gamma^{\iota\kappa} = 0 \qquad (\iota \neq \kappa) \\ &\gamma_\iota = 0, \qquad \chi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

で, 空間的の Christoffel 記号は全部零になる.

したがって, この時間変数 t' は各準拠点に静止している標準時計が示す時間に一致する. ある任意の時刻 t' においてはこの空間幾何学は Euclid 的であり, x', y', z' は共通因数 $e^{2ct'/R}$ を除けば直交座標となる. 原点 $r'=0$ と点 (r', θ', ϕ') の間の距離は, 標準物指で測って,

$$l = e^{ct'/R} r' \tag{104}$$

となる. 光の速度は一定で, c に等しい.

$$w = \frac{d\sigma}{dt'} = c. \tag{105}$$

また, 容易にわかるように光の進路は直線である. このことは, 光線の世界線 (VIII. 87) の第1式から直ちにわかることである. すなわちこの式で $i=\iota=1$, 2, 3 とおけば

$$\frac{d}{d\lambda}\left(e^{2ct'/R} \frac{dx'^\iota}{d\lambda}\right) = 0$$

---

† G. E. Lemaître, *J. Math. and Phys.* (*M. I. T*), **4**, 188 (1925)

‡ H. P. Robertson, *Phis. Mag.* **5**, 835 (1928)

がえられる．これを積分して

$$\frac{dx'^{\iota}}{d\lambda}=a^{\iota}e^{-2ct'/R} \tag{106}$$

となる．a^{ι} は積分定数である．そこで

$$\frac{dx'/dt'}{a^1}=\frac{dy'/dt'}{a^2}=\frac{dz'/dt'}{a^3} \tag{107}$$

となり，光線の進路の方程式は，

$$\frac{x'-x'_0}{a^1}=\frac{y'-y'_0}{a^2}=\frac{z'-z'_0}{a^3} \tag{108}$$

という形の1次方程式となる．このように (x', y', z') 空間で光線は直線であるから，天体の視差をきめるのに通常の三角測量の方法を用いることができ，こうして直接測定によって距離 (104) をきめることができる．

さて x'-軸に沿う光線の伝播について考えることにしよう．(105) と (103) から

$$e^{ct'/R}\frac{dx'}{dt'}=\pm c, \tag{109}$$

すなわち

$$\frac{dx'}{dt'}=\pm ce^{-ct'/R} \tag{110}$$

がえられる．したがって $x'=x'_0>0$ なる点を時刻 t'_0 に出発し，x'-軸の負の方向に進む光の信号の運動は，

$$x'=x'_0+R(e^{-ct'/R}-e^{-ct_0'/R}) \tag{111}$$

で与えられる．したがって

$$x'_0<Re^{-ct_0'/R} \tag{112}$$

でないと，この信号は決して原点に到達できないことがわかる．

線素 (102) に対応する世界は明らかに無限に広がってはいるが，原点に在る観測者は (112) で定義される‘地平線’の彼方にある領域に関する如何なる情報をもうることができない．したがって時刻 t'_0 に，原点におかれた観測者の観測可能な領域内の最遠点までの距離は (104) と (112) により

$$L=e^{ct_0'/R}Re^{-ct_0'/R}=R \tag{113}$$

となる．これは時間に無関係に一定である．これは de Sitter 宇宙が元来静的な性質のものであることの反映である．さらに (102) は，原点を任意に移動しても不変であるから，以上の考察は，ここで考えている準拠系内に静止している任意の観測者に対して成り立つ．しかし，地平線の位置は相異なる‘同等な’観測者ごとにちがうのは言うまでもない．

この座標系では自由粒子に作用する重力は零でその運動方程式は (X. 20')

$$\frac{d_c p_\iota}{dt'}=0 \tag{114}$$

で与えられる．ここで

$$\left.\begin{aligned} p_\iota &= mu_\iota \\ m &= \frac{\overset{0}{m}_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \\ u_\iota &= \gamma_{\iota\kappa}\frac{dx'^\kappa}{dt'} \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

である．さらにこの場合空間的な Christoffel 記号は零であるから，

$$\frac{d_c p_\iota}{dt'}=\frac{dp_\iota}{dt'}=0$$

となり，これは運動量ベクトルの共変成分が一定

$$p_\iota = \text{一定} \tag{116}$$

であることを示している．しかしその反変成分は一定でない．なぜならば

$$p^\iota=\gamma^{\iota\kappa}p_\kappa=e^{-2ct'/R}p_\iota \tag{117}$$

であるからである．これは微分方程式 (X. 19′) に符合する．(117) から

$$\left.\begin{aligned} mu^\iota &= m\frac{dx'^\iota}{dt'}=p_\iota e^{-2ct'/R} \\ \text{あるいは}\quad \frac{dx'/dt'}{b^1} &= \frac{dy'/dt'}{b^2}=\frac{dz'/dt'}{b^3} \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

がえられる．ここで b^1, b^2, b^3 は定数である．したがって，自由粒子の軌道も

$$\frac{x'-x'_0}{b^1}=\frac{y'-y'_0}{b^2}=\frac{z'-z'_0}{b^3} \tag{119}$$

という型の方程式で記述される直線になる．しかしこの粒子の速度は，一般に一定ではない．唯，ある時刻に，いま考えている準拠系に対する速度が零である場合には，それはいつまでも零である．何となれば (118) から，

$$t'=t'_0 \quad \text{で} \quad \frac{dx'^\iota}{dt'}=0$$

であるためには $p_\iota=0$, したがって $\dfrac{dx'^\iota}{dt'}$ は常に零でなければならないからである．

このように (x',y',z')＝一定の任意の準拠点は，§113 のおわりに注意したように，自由落下する粒子で表わされる．この準拠系は変形可能なので原点から空間座標が一定であるような点までの距離は (104) により，時間に依存する．ゆえに星雲をこの座標系内に静止する自由粒子として取り扱ってよいと仮定すればその原点からの距離は，視線速度

$$v_r=\frac{dl}{dt'}=\frac{c}{R}e^{ct'/R}r'=\frac{c}{R}l \tag{120}$$

で増大する．したがってこの速さは距離 l に比例することになる．

この動径方向の速度により，星雲の発したスペクトル線に赤方偏移が起ることが期待される．この問題をしらべるため，準拠点 (r',θ',ϕ') に永久に位置する粒子が放出する光について考えよう．(105) および (103) によれば光の動径速度は

$$\frac{dr'}{dt'}=\pm ce^{-ct'/R} \tag{121}$$

である．したがって，t_1' および t_2' をそれぞれその粒子が光を出したときの時刻およびその光が原点 $r'=0$ に到着したときの時刻とすれば，積分により

$$\int_{r'}^{0}dr'=-c\int_{t_1'}^{t_2'}e^{-ct'/R}dt' \qquad \text{すなわち} \quad r'=R(e^{-ct_1'/R}-e^{-ct_2'/R}) \tag{122}$$

がえられる．これを微分することにより，2つの波の山が次々に原点に到着する時間間隔 Δt_2 とそれが放出されたときの間隔 Δt_1 の間に

$$\Delta t_2'=\Delta t_1'e^{c(t_2-t_1)/R} \tag{123}$$

という関係が成り立っていることがわかる．さて，t' は静止している標準時計が示す時刻であり，光の速度は到るところ c であるから，放射された光の固有波長 λ^0 は

$$\lambda^0=c\Delta t_1'$$

となる．同様に原点に在る観測者の測った波長は

$$\lambda=c\Delta t_2'$$

となるであろう．ゆえに (123) から

$$\lambda=\lambda^0e^{c(t_2'-t_1')/R} \tag{124}$$

がえられる．さらに光を観測した時刻における粒子までの距離は，(104) および (122) により

$$l=r'e^{ct_2'/R}=R(e^{c(t_2'-t_1')/R}-1) \tag{125}$$

であるから，(124) から

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\frac{\lambda-\lambda^0}{\lambda^0}=\frac{l}{R} \tag{126}$$

が求められる．このように，もし個々の星雲が有する小さな速度を無視して，いま用いている座標系内に静止しているものと仮定すれば，Hubble や Humason が観測した赤方偏移に対する説明がえられるのである．数量的な一致がえられるためには，(126) 式中の定数 R は，

$$R\approx 1.66\times 10^{27}\ \text{cm.}\approx 1.75\times 10^{9}\ \text{光年} \tag{127}$$

という値をもたなければならない．宇宙の‘半径’に相当するこの値は Einstein 宇宙の場合の値 (71) より少し小さい．この説明は星雲が平均において座標 (x', y', z', t') で定義される準拠系に対して静止しているという仮定に立脚している．仮定とはいうものの，Weyl の仮説†として知られているこの仮定は，非常に自然なものであって，この模型では他の任意の準拠点に在る観測者と，われわれの座標系の任意に選ばれた原点にある観測者とが，星雲から来る光に同じ赤方偏移を観測するという意味で，あらゆる星雲が同格であるという非常に魅力ある特色を有するものである．

もとの座標系における星雲の運動は，(100) の第1式を r について解いてえられる．したがって

$$r^2=\frac{r'^2}{e^{-2ct/R}+r'^2/R^2} \tag{128}$$

で，式中の r' は各星雲ごとに一定である．このように Weyl の仮説によれば星雲はすべて自由に落下する物体であるということになる．そして，これらは $t=-\infty$ に $r=0$ なる点を出発し，$t\to+\infty$ において，$r=R$ なる対蹠点で落下が終る．

最後に

$$\left.\begin{aligned} &z_1=x'e^{ct'/R},\quad z_2=y'e^{ct'/R},\quad z_3=z'e^{ct'/R}\\ &z_0=R\left(\cosh\frac{ct'}{R}-\frac{r'^2}{2R^2}e^{ct'/R}\right)\\ &z_4=iR\left(\sinh\frac{ct'}{R}+\frac{r'^2}{2R^2}e^{ct'/R}\right)\end{aligned}\right\} \tag{129}$$

により，5つの変数 $z_\mu=(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ を導入すれば

$$\sum_{\mu=0}^{4}z_\mu^2=R^2 \tag{130}$$

となり，線素は

$$ds^2=\sum_{\mu=0}^{4}(dz_\mu)^2 \tag{131}$$

となる．このように de Sitter 宇宙の時空連続体は5次元の擬 Euclid 空間内の4次元的球面と考えることができる．このことは (72), (76) および (83) によれば Einstein の宇宙の4元空間が球型の切口をもち時間軸の方向を軸とする円筒と考えることができるのと同じである．

方程式 (130) および (131) は，変数 (z_μ) に関する5次元の直交変換群に対して形が不変であるから，これに対応して $(z_0, \cdots\cdots, z_4)$ と (129) 式で結ばれて

† H. Weyl, *Phys. ZS.* **24**, 230 (1923); *Phil. Mag.* **9**, 936 (1930)

いる $x^i=(x', y', z', ct')$ が受ける変換群 L に対して線素 (102) もその形が不変である．したがって，L 群に属する変換は，§121 で述べた意味で同等な座標系 (x^i) を結ぶものである．このような変換は de Sitter 宇宙において，特殊相対性理論の場合の平坦な平面内における非斉次 Lrentz 変換と同じ役割を演ずるものである†.

このように，de Sitter の模型はスペクトル線の赤方偏移に自然な説明を与えるけれども，この模型も次の理由で実際の宇宙の満足な模型と見なすことが困難なのである．この模型の基礎になった条件 (92) によれば，線素 (97) を与える天体物質の密度と圧力は

$$\overset{0}{\mu}{}^{0}c^2+\overset{0}{p}{}^{0}=0 \tag{132}$$

という式を満足しなければならない．$\overset{0}{\mu}{}^{0}c^2 \gg 0$ であるから，(132) により $\overset{0}{p}$ は負で非常に大きいと仮定しなければならない．たとえわれわれの模型を満たしている理想流体に凝集力が存在することを許すとしても，$\overset{0}{p}$ の値が $-\overset{0}{\mu}{}^{0}c^2$ というのは知られているどんな物質の性質とも全く調和できないことである．ゆえに (132) が満足されるのは，密度が零か，あるいは少くともそれが実際に観測されている天体物質の平均密度より非常に小さい場合に限ることになる．そこで de Sitter の模型は物質や輻射をほとんど含んでいないような空虚な空間に対応する．したがって星や雲を重力場に寄与しない一種の試験体のように取り扱うことになる．しかし，この見方は一般相対性理論の基礎の考え方に矛盾する．一般相対性理論の基礎の考え方によれば，例えば遠心力や Coriolis の力は，回転系に対する遠方の天体の運動によるものである．Einstein の宇宙模型では，非永久的重力場はこの線に沿って説明できるが，de Sitter の空虚な空間模型では，このような説明の基礎が失われてしまう．したがってこの場合には非永久的重力場は Newton の理論の場合と同様に仮想的な力と同じ性質のものということになってしまう．

以上のような考察から，Einstein の模型は，星雲から来る光の赤方偏移を説明できないけれども，de Sitter の模型よりは実際の宇宙のよい近似であるように思われる．Einstein と de Sitter の2つの静的模型の利点を合せもつような模型を作ろうとすれば，計量テンソルが本来時間に依存するような非静的な模型によらざるをえない．このような模型の研究はすでに広く文献上にあらわ

† 第XII章の 364 頁の文献，および C. Møller, *Dan. Mat. Fys. Medd.* 18 No. 6, p. 40 (1941) を見よ．

れている†. これらの研究には，はじめ静的であったものが膨脹する模型とか，膨脹と収縮を繰り返すような模型等がある. しかし，実際の宇宙に関して現在われわれが有する知識は，時空の限られた領域を覆うにすぎないものであり，全く不十分なものである. したがって，いろいろな動的模型のどれを選ぶべきかを一意的に決めることは不可能である.

† この問題の全般的な取扱いについては，Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Oxford, 1934 を見よ.

附　　録

1. Gauss の定理

3次元 Euclid 空間内の閉曲面 σ で囲まれた有限な領域を V とし，$f(x_1, x_2, x_3)$ を V 内で，直交座標 x_1, x_2, x_3 の与えられた函数とする．いま，領域 V に亘る体積積分 $\int_V \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$ について考察する．閉曲面 σ は外側に向って凸であって，x_1-軸に平行で x_2, x_3 が一定な直線は σ と2点だけで交るものとすれば，この積分は変数 x_1 について部分積分を行って，

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\sigma_1} (f^+ - f^-) dx_2 dx_3 \tag{1}$$

と書くことができる．ここで右辺の積分は，閉曲面 σ の (x_2, x_3)-面上への正射影につい行い，f^+ および f^- は，その正射影が σ_1 の面積 dx_2dx_3 内に落ちるような σ 上の2点 p^+ および p^- における f の値である．さて，$d\sigma^+$ および $d\sigma^-$ をそれぞれ，その (x_2x_3)-面への正射影が dx_2dx_3 に等しいような p^+ および p^- における σ の面積素とする．そうすれば，$\boldsymbol{n}^+ = (n_1^+, n_2^+, n_3^+)$ および $\boldsymbol{n}^- = (n_1^-, n_2^-, n_3^-)$ が $d\sigma^+$ および $d\sigma^-$ の外向き法線方向の単位ベクトルで，$x_1^+ > x_2^-$ のときは，

$$n_1^+ d\sigma^+ = -n_1^- d\sigma^- = dx_2 dx_3 \tag{2}$$

であることは明らかである．ゆえに (1) は，

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_1} dV = \int_\sigma f . n_1 d\sigma \tag{3}$$

と書くことができる．ここで右辺の積分は全表面 σ 上で行うものであり，n_1 は外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の x_1-成分である．表面 σ が凸でない場合には x_1-軸に平行な直線はこの面ともっと多くの―ただし偶数個の―点で交るけれども．このような場合にも (3) が成り立つことは容易に解る．同様にして，$g(x_1, x_2, x_3)$, $h(x_1, x_2, x_3)$ が他の2つの空間座標の与えられた函数であるとすればやはり，

$$\left.\begin{aligned} \int_V \frac{\partial g}{\partial x_2} dV &= \int_\sigma g \cdot n_2 d\sigma \\ \int_V \frac{\partial h}{\partial x_3} dV &= \int_\sigma h \cdot n_3 d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

がえられる．特に f, g, h が1つのベクトル場 $\boldsymbol{a} = (a_i)$ の成分 $a_1(\boldsymbol{x}), a_2(\boldsymbol{x}), a_3(\boldsymbol{x})$ である場合には，(3), (3′) 式を加え合わせて，

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \int_\sigma (a_i n_i) d\sigma$$

あるいは，

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV = \int_\sigma (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}) d\sigma = \int_\sigma a_n d\sigma \tag{4}$$

がえられる．ここで a_n は $\boldsymbol{a}$ の外向き法線方向の成分である．(4) 式は左辺の体積積分を表面積分に変換する式で，Gauss の定理 (IV. 188) に他ならない．

また，$t_{\iota\kappa}(\boldsymbol{x})$ が2階の3次元テンソル場とすれば，$t_{\iota1}=f$，$t_{\iota2}=g$，$t_{\iota3}=h$ とおくことによって，(3) と (3′) から

$$\int_V \frac{\partial t_{\iota\kappa}}{\partial x_\kappa} dV = \int_\sigma (t_{\iota\kappa} n_\kappa) d\sigma \tag{5}$$

すなわち (IV. 192) がえられる．

2. 4元電流密度の変換式

(V. 4, 4′) によれば，2つの慣性系 S および S' における4元電流密度 s_i, s'_i を結ぶ変換規則は，荷電と電流の可能をあらゆる分布について

$$\frac{\partial s'_i}{\partial x'_i}=0 \tag{1}$$

が

$$\frac{\partial s_i}{\partial x^i}=0 \tag{1′}$$

の結果としてえられるような性質のものでなければならない．したがってこの変換は

$$s'_i=f_i(s_1, s_2, s_3, s_4) \tag{2}$$

なる形のものでなければならない．ここで f_i は，20 個の量 s_i および $s_{k,l}\equiv\partial s_k/\partial x_l$ のあらゆる変動に対して，

$$\frac{\partial f_i}{\partial x'_i} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_i} \equiv \left(\frac{\partial f_i(s_m)}{\partial s_k} \alpha_{il} \right) s_{k,l}=0 \tag{3}$$

という関係を満たさなければならない．ただしこの変動は

$$s_{i,i}=0 \tag{4}$$

という制限だけはみたしていなければならない．(4) に Lagrange の未定係数 λ をかけ，これを (3) から引けば

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial s_k} \alpha_{il} - \lambda \delta_{k,l} \right) s_{kl}=0 \tag{5}$$

がえられる．λ は (s_i) の函数であってもよい．この関係は変数 s_i および $s_{k,l}$ の任意の独立な変動に対して成り立たなければならない．変数 $s_{k,l}$ の変分から，

$$\frac{\partial f_i}{\partial s_k} \alpha_{il} = \lambda(s_r) \delta_{kl}, \tag{6}$$

がえられる．あるいは直交関係 (IV. 14) を用いて，

$$\frac{\partial f_i}{\partial s_k} = \lambda(s_r) \alpha_{ik} \tag{6′}$$

がえられる．

(6) を s_m について微分すれば

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial s_k \partial s_m} \alpha_{il} = \frac{\partial \lambda}{\partial s_m} \delta_{kl}$$

をえる．左辺は k と m に関して対称であるから，

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s_m}\delta_{kl}=\frac{\partial\lambda}{\partial s_k}\delta_{ml}$$

でなければならない．この式で $m=l\neq k$ とすれば

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s_k}=0, \tag{7}$$

すなわち λ もまた変数 s_i に無関係でなければならない．ゆえに (6′) を積分して

$$f_i(s_k)=\lambda\alpha_{ik}s_k+\beta_{ik}$$

をえる．ここで β_{ik} および λ は定数である．S 内で荷電密度が零ならば，すなわち $s_i=0$ ならば，S' 系でも零でなければならない．ゆえに $\beta_{ik}=0$ であり，したがって変換 (2) は

$$s_i'=\lambda\alpha_{ik}s_k \tag{8}$$

という形になる．(IV. 11), (V. 3) および (8) から，

$$s_i's_i'=\lambda^2 s_k s_k,$$

すなわち，

$$\rho'^2(1-u'^2/c^2)=\lambda^2\rho^2(1-u^2/c^2) \tag{9}$$

をえる．

(II. 8, 14) 式について行ったのと同じ相対性の議論から λ の値は

$$\lambda=1 \tag{10}$$

でなければならない．そこで (8) は (V. 5) という変換となり，4 元電流密度は 4 元ベクトルであることがわかる．

3. 均質等方物質内における平面波

電気的，磁気的定数が ϵ および μ で，$\rho=\boldsymbol{J}=0$ である均質等方物質の静止系では Maxwell 方程式 (VII. 31, 32) は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0, \tag{1}$$

$$\epsilon\dot{\boldsymbol{E}}=c\operatorname{curl}\boldsymbol{H},\qquad \mu\dot{\boldsymbol{H}}=-c\operatorname{curl}\boldsymbol{E}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{3}$$

と書くことができる．直交座標系 (x, y, z) の x 軸に垂直な波面をもっている平面波の場合には，場のベクトルは，x と t のみの函数である．したがって (1) およびベクトル方程式 (2) の x-成分から

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial H_x}{\partial x}=\dot{E}=\dot{H}_x=0$$

がえられる．そして，光学では一定であるような場は重要でないから，

$$E_x=H_x=0 \tag{4}$$

とおくことができる．(2) の y-および z-成分から

$$\epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}=-c\frac{\partial H_z}{\partial x},\qquad \epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}=c\frac{\partial H_y}{\partial x} \tag{5}$$

$$\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}=c\frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad \mu\frac{\partial H_z}{\partial t}=-c\frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{6}$$

がえられる. (5) または (6) のいずれか一方の組を t で微分して他の組の式を用いると, 函数 E_y, E_z, H_y, H_z はおのおのがいずれも波動方程式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=w^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{7}$$

を満足することがわかる. ここで

$$w=\frac{c}{\sqrt{(\epsilon\mu)}} \tag{8}$$

は定数である.

波動方程式 (7) の一般解は

$$\psi=f_1(t-x/w)+f_2(t+x/w)$$

である. ここで f_1 および f_2 は任意の函数である. この式の 2 つの項はそれぞれ速度 w で x-軸の正の方向と負の方向に伝播する平面波を表わす. したがって x-軸の正方向に伝播する波を考えることにすれば,

$$E_y=\epsilon^{-1/2}f(t-x/w), \qquad E_z=\epsilon^{-1/2}g(t-x/w) \tag{9}$$

とおくことができる. f と g は, 変数 $t-x/w$ の任意の函数である. E_y, E_z が (9) で与えられたときは, (6) を積分することにより

$$H_y=-\mu^{-1/2}g(t-x/w), \quad H_z=\mu^{-1/2}f(t-x/w) \tag{10}$$

がえられる.

(4), (9) および (10) は x-軸の正方向に伝わる平面波の最も一般的な式である. 3 つの単位ベクトル

$$\boldsymbol{n}=(1, 0, 0)$$
$$\boldsymbol{e}^{(1)}=(0, 1, 0)$$
$$\boldsymbol{e}^{(2)}=(0, 0, 1)$$

を導入すれば, これらの式は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\epsilon^{-1/2}f(t-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})/w)\boldsymbol{e}^{(1)}+\epsilon^{-1/2}g(t-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})/w)\boldsymbol{e}^{(2)},\\ \boldsymbol{H}&=-\mu^{-1/2}g(t-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})/w)\boldsymbol{e}^{(1)}+\mu^{-1/2}f(t-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})/w)\boldsymbol{e}^{(2}\end{aligned} \tag{11}$$

と書くこともできる. そしてこのようなベクトル型にしておけば, $\boldsymbol{n}$ が新しい x-軸の方向を向いていないようにする座標の回転を行っても, この式はそのまま成り立つ. そのときは, $\boldsymbol{e}^{(1)}$ と $\boldsymbol{e}^{(2)}$ は互に直交し, 共に波動法線 $\boldsymbol{n}$ にも直交するような任意の一定の単位ベクトルである.

4. 特定の準拠系内での座標変換による重力場の量 γ_{ik}, γ_i, χ, ω_{ik} の変換

同じ準拠系内の相異なる 2 つの座標系を結ぶ変換 (VIII. 59)

$$x'^i=x'^i(x^k), \qquad x'^4=f(x^i) \tag{1}$$

は

$$\alpha_4^{\iota}=\frac{\partial x'^{\iota}}{\partial x^4}=0,\qquad \breve{\alpha}_4^{\iota}=\frac{\partial x^{\iota}}{\partial x'^4}=0 \tag{2}$$

によって特徴づけられる.

したがって, (VII. 57) から

$$\begin{aligned} g'_{\iota 4}&=\breve{\alpha}_{\iota}^{l}\breve{\alpha}_4^{m}g_{lm}=\breve{\alpha}_{\iota}^{l}\breve{\alpha}_4^{4}g_{l4}\\ &=\breve{\alpha}_4^4(\breve{\alpha}_{\iota}^{\lambda}g_{\lambda 4}+\breve{\alpha}_{\iota}^{4}g_{44}), \end{aligned} \tag{2'}$$

がえられ, これから,

$$\left.\begin{aligned} 1+2\chi'/c^2&=-g'_{44}=(\breve{\alpha}_4^4)^2(-g_{44})=(\breve{\alpha}_4^4)^2(1+2\chi/c^2)\\ \gamma'_{\iota}&=\frac{g'_{\iota 4}}{\sqrt{(-g'_{44})}}=\frac{\breve{\alpha}_4^4}{|\breve{\alpha}_4^4|}(\breve{\alpha}_{\iota}^{\kappa}\gamma_{\kappa}-\breve{\alpha}_{\iota}^{4}\sqrt{(-g_{44})}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

がえられる. さらに,

$$\gamma'_{\iota\kappa}=g'_{\iota\kappa}+\gamma'_{\iota}\gamma'_{\kappa}=\breve{\alpha}_{\iota}^{l}\breve{\alpha}_{\iota}^{m}g_{lm}+(\breve{\alpha}_{\iota}^{\lambda}\gamma_{\lambda}-\breve{\alpha}_{\iota}^{4}\sqrt{(-g_{44})})(\breve{\alpha}_{\kappa}^{\mu}\gamma_{\mu}-\breve{\alpha}_{\kappa}^{4}\sqrt{(-g_{44})}),$$

すなわち

$$\gamma'_{\iota\kappa}=\breve{\alpha}_{\iota}^{\lambda}\alpha_{\kappa}^{\mu}\gamma_{\lambda\mu} \tag{4}$$

である. したがって, $\gamma_{\iota\kappa}$ は1つの空間テンソルのように変換され, $d\sigma^2=\gamma_{\iota\kappa}dx^{\iota}dx^{\kappa}$ は変換 (1) に対して不変である.

変換 (VIII. 103)

$$x'^{\iota}=x^{\iota},\qquad x'^4=f(x^i) \tag{5}$$

は変換 (1) のうちで座標時計の進み方と配置だけをかえる特別な変換である. この場合には,

$$\alpha_k^{\iota}=\breve{\alpha}_k^{\iota}=\frac{\partial x'^{\iota}}{\partial x^k}=\frac{\partial x^{\iota}}{\partial x'^k}=\delta_k^{\iota} \tag{6}$$

がえられる. (VIII. 55) で $i=4$ とおいた式にこの関係を用いて,

$$\alpha_{\kappa}^4+\alpha_4^4\breve{\alpha}_{\kappa}^4=0,\qquad \alpha_4^4\breve{\alpha}_4^4=1 \tag{7}$$

すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\kappa}}+\frac{\partial f}{\partial x^4}\breve{\alpha}_{\kappa}^4=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial x^4}\breve{\alpha}_4^4=1 \tag{8}$$

をうる.

ダッシュのついた系で重力場のベクトル・ポテンシャル γ'_{ι} が零になるようにしようとするには, (3) から

$$\breve{\alpha}_{\iota}^{\kappa}\gamma_{\kappa}-\breve{\alpha}_{\iota}^{4}\sqrt{(1+2\chi/c^2)}\equiv\gamma_{\iota}-\breve{\alpha}_{\iota}^{4}\sqrt{(1+2\chi/c^2)}=0 \tag{9}$$

という条件がえられ, これは (7) により (VIII. 109);

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\iota}}+\frac{\gamma_{\iota}}{\sqrt{(1+2\chi/c^2)}}\frac{\partial f}{\partial x^4}=0 \tag{10}$$

となる.

$$\sigma_{\iota}=\frac{\gamma_{\iota}}{\sqrt{(-g_{44})}}=\frac{g_{\iota 4}}{-g_{44}} \tag{11}$$

とおけば (2), (2'), (6) および (8) から

$$\sigma'_\iota = \frac{g'_{\iota 4}}{-g'_{44}} = \frac{\sigma_\iota}{\breve{\alpha}^4_4} - \frac{\breve{\alpha}^4_\iota}{\breve{\alpha}^4_4} = \frac{\partial f}{\partial x^4}\sigma_\iota + \frac{\partial f}{\partial x^\iota} \tag{12}$$

がえられる．さて，$\dfrac{\partial}{\partial x^\iota}+\sigma_\iota\dfrac{\partial}{\partial x^4}$ なる演算子は変換 (5) に対して不変であることは容易にわかる．何となれば

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^k} = \delta^k_i\frac{\partial}{\partial x^k} + \breve{\alpha}^4_i\frac{\partial}{\partial x^4}$$

であり，これと (12) および (8) から，

$$\frac{\partial}{\partial x'^\iota} + \sigma'_\iota\frac{\partial}{\partial x'_4} = \frac{\partial}{\partial x^\iota} + \sigma_\iota\frac{\partial}{\partial x^4} \tag{13}$$

がえられるからである．このとき

$$\omega_{\iota\kappa} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\iota} + \sigma_\iota\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\sigma_\kappa - \left(\frac{\partial}{\partial x^\kappa} + \sigma_\kappa\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\sigma_\iota$$

と書くことができる (VIII. 110) なる量は (5) という変換の際に簡単な法則

$$\omega'_{\iota\kappa} = \alpha^4_4\omega_{\iota\kappa} = \frac{\partial x'^4}{\partial x^4}\omega_{\iota\kappa} \tag{14}$$

にしたがって変換されることが直接計算によって示される．すなわち空間テンソル $\omega_{\iota\kappa}$ の各成分にはこの 2 つの系における座標時計の進み方の比が掛ることになる．

5. 3 次元空間の対隅テンソル

計量テンソルの行列式 $\gamma=|\gamma_{ik}|$ が正の一定値をもつ 3 次元空間では

$$\epsilon_{\iota\kappa\lambda} = \sqrt{\gamma}\,\delta_{\iota\kappa\lambda} \tag{1}$$

は反対称擬テンソルの共変成分になっている．ただし $\delta_{\iota\kappa\lambda}$ は § 43 の終りで定義した 3 次元の Levi-Civita 記号である．

計量テンソルの反変成分で作った行列式 $|\gamma^{\iota\kappa}|$ が γ^{-1} に等しいことを用いれば，擬テンソル (1) の反変成分 $\epsilon^{\iota\kappa\lambda}$ は次のようになる．

$$\epsilon^{\iota\kappa\lambda} = \epsilon_{\mu\nu\rho}\gamma^{\mu\iota}\gamma^{\nu\kappa}\gamma^{\rho\lambda} = \sqrt{\gamma}\,\delta_{\mu\nu\rho}\gamma^{\mu\iota}\gamma^{\nu\kappa}\gamma^{\rho\lambda}$$

すなわち

$$\epsilon^{\iota\kappa\lambda} = \sqrt{\gamma}\begin{vmatrix} \gamma^{1\iota} & \gamma^{1\kappa} & \gamma^{1\lambda} \\ \gamma^{2\iota} & \gamma^{2\kappa} & \gamma^{2\lambda} \\ \gamma^{3\iota} & \gamma^{3\kappa} & \gamma^{3\lambda} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\delta_{\iota\kappa\lambda}. \tag{2}$$

そこで反対称テンソル $H^{\iota\kappa}=-H^{\kappa\iota}$ に対隅な軸性ベクトル $\boldsymbol{H}$ の共変成分 H_ι は

$$H_\iota = \frac{1}{2}\epsilon_{\iota\kappa\lambda}H^{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\,\delta_{\iota\kappa\lambda}H^{\kappa\lambda}, \tag{3}$$

となり，これに対応する反変成分 H^ι は

$$H^\iota = \frac{1}{2}\epsilon^{\iota\kappa\lambda}H_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\delta_{\iota\kappa\lambda}H_{\kappa\lambda} \tag{4}$$

となる．したがって H_ι と H^ι とを陽表的に表わせば

$$(H_1, H_2, H_3)=\sqrt{\gamma}(H^{23}, H^{31}, H^{12}),$$

$$(H^1, H^2, H^3)=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(H_{23}, H_{31}, H_{12}) \tag{5}$$

となり，(5) から (3) と (4) の逆の関係式は

$$H^{\iota\kappa}=\epsilon^{\iota\kappa\lambda}H_\lambda, \qquad H_{\iota\kappa}=\epsilon_{\iota\kappa\lambda}H^\lambda \tag{5'}$$

であることがわかる．

2つのベクトル a^ι, b^ι から反対称テンソル $c^{\iota\kappa}=a^\iota b^\kappa-a^\kappa b^\iota$ が作られるが，このテンソルに対隅な軸性ベクトルは2つのベクトルのベクトル積

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{6}$$

であり，その成分は (5) を用いて求められる．これと同様にテンソル $\mathrm{curl}_{\iota\kappa}\,\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_\kappa}{\partial x^\iota}-\frac{\partial a_\iota}{\partial x^\kappa}$ に対応する軸性ベクトルは curl $\boldsymbol{a}$ である．

3階の反対称テンソル $V_{\iota\kappa\lambda}$ に対隅なテンソルは次のような擬スカラーである．

$$V=\frac{1}{3!}\epsilon^{\iota\kappa\lambda}V_{\iota\kappa\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{1}{3!}\delta_{\iota\kappa\lambda}V_{\iota\kappa\lambda}. \tag{7}$$

もしも $H^\iota=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\delta_{\iota\kappa\lambda}H_{\kappa\lambda}$ がテンソル $H_{\iota\kappa}$ に対隅なベクトルならば $\boldsymbol{H}$ の発散はテンソル $H_{\iota\kappa}$ の回転に対隅となる．これは次の様にして証明できる．すなわち第X章の (75) 式から

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}&=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}H^\iota}{\partial x^\iota}=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\delta_{\iota\kappa\lambda}\frac{\partial H_{\kappa\lambda}}{\partial x^\iota}\\&=\frac{1}{3!}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\delta_{\iota\kappa\lambda}\left(\frac{\partial H_{\kappa\lambda}}{\partial x^\iota}+\frac{\partial H_{\lambda\iota}}{\partial x^\kappa}+\frac{\partial H_{\iota\kappa}}{\partial x^\lambda}\right)\\&=\frac{1}{3!}\epsilon^{\iota\kappa\lambda}\,\mathrm{curl}_{\iota\kappa\lambda}\{H_{\iota\kappa}\}.\end{aligned} \tag{8}$$

(2) と (5′) とを用いればこれと同様に

$$\begin{aligned}\mathrm{div}^\iota\{H^{\iota\kappa}\}&=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\iota}(\sqrt{\gamma}H^{\iota\kappa})=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\delta_{\iota\kappa\lambda}\frac{\partial H_\lambda}{\partial x^\kappa}\\&=\frac{1}{2}\epsilon^{\iota\kappa\lambda}\left(\frac{\partial H_\lambda}{\partial x^\kappa}-\frac{\partial H_\kappa}{\partial x^\lambda}\right)=\mathrm{curl}^\iota\,\boldsymbol{H}\end{aligned} \tag{9}$$

がえられる．

6. 空間が平坦である条件

空間内のあらゆる点において測地的である座標系を導入することができるような空間を平坦な空間と定義する．R_{iklm} を第IX章の (99) 式で定義された曲率テンソルとすれば，上の平坦な空間の条件がみたされているときにはいたる所で

$$R_{iklm}=0 \tag{1}$$

が成立することは明かである．逆に (1) が空間が平坦であるための十分条件になってい

ることを次に示そう．

ベクトル場 $a^i(x)$ がいたる所で方程式

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^l}=-\Gamma^i_{lr}a^r \tag{2}$$

をみたしているとき，$a^i(x)$ を**定常的**であるという．ただしここに Γ^i_{lr} は Christoffel の記号である．方程式 (2) は函数 $a^i(x)$ に関する微分方程式の組を表わし，この組は積分可能の条件

$$-\frac{\partial(\Gamma^i_{lr}a^r)}{\partial x^m}+\frac{\partial(\Gamma^i_{mr}a^r)}{\partial x^l}=\frac{\partial^2 a^i}{\partial x^l\partial x^m}-\frac{\partial^2 a^i}{\partial x^m\partial x^l}=0 \tag{3}$$

が成立する場合にかぎり解をもつ．条件式 (3) を書き改めれば

$$\left(-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{mk}-\Gamma^i_{ms}\Gamma^s_{lk}\right)a^k\equiv-R^i_{\cdot klm}a^k=0 \tag{3$'$}$$

すなわち (1) が成立すれば積分可能の条件はみたされ，このときに (2) は積分されて，その解はある点 P におけるベクトル $a^i(P)$ が与えられれば一意的に決められる．さて

$$da^i=\frac{\partial a^i}{\partial x^l}dx^l=-\Gamma^i_{lr}a^r dx^l$$

が成立するから定常的なベクトル場のベクトルは (IX. 62) にしたがって平行移動から求められる．このことは，曲率テンソルが零の場合には，ベクトルの平行移動は一意的でしかも移動を行なう途にはよらないことを示す (IX. 104) と一致している．

さて，任意の点 P における与えられた 4 個のベクトル $a^i_{(k)}(P)$ によって定まる微分方程式 (2) の 4 個の互に異なる解 $a^{(i)}_k=\{a^i_{(1)}, a^i_{(2)}, a^i_{(3)}, a^i_{(4)}\}$ について考察する．ただし 4 つのベクトル $a^i_{(k)}(P)$ はたとえば互に直交するというように 1 次独立であるようにとっておかなければならぬ．そして変換係数 $\breve{\alpha}^i_k(x)$ を

$$\breve{\alpha}^i_k(x)=a^i_{(k)}(x) \tag{4}$$

のように選べば，変換 $x'^i=x'^i(x^k)$ によって到る所で測地線的な座標系 (x'^i) をえることを次のようにして示すことができる．先づ第一に積分可能な条件 (IX. 14) であるが，これは

$$\frac{\partial\breve{\alpha}^i_k}{\partial x'^l}=\frac{\partial\breve{\alpha}^i_l}{\partial x'^k} \tag{5}$$

のように書ける．これが (4) によってみたされていることが示される．すなわち式 (2) はベクトル場 $a^i_{(k)}$ のどれについても成立しているから，

$$\frac{a\breve{\alpha}^i_k}{\partial x'^l}=\frac{\partial\breve{\alpha}^i_k}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}=\frac{\partial\alpha^i_{(k)}}{\partial x^r}\alpha^r_l=-\Gamma^i_{rs}a^s_{(k)}\breve{\alpha}^r_l=-\Gamma^i_{rs}\breve{\alpha}^s_k\breve{\alpha}^r_l \tag{6}$$

がえられる．これは Γ^i_{rs} が r, s に関して対称であることから，k と l に関して対称になっている．すなわち (5) が成立する．

次に Christoffel の公式 (IX. 53) と (6) とより

$$\Gamma'^i_{kl}=\alpha^i_r\left(\frac{\partial\breve{\alpha}^r_k}{\partial x'^l}+\breve{\alpha}^s_k\breve{\alpha}^t_l\Gamma^r_{st}\right)$$

$$=\alpha^i_r(-\Gamma^r_{st}\breve{\alpha}^s_k\breve{\alpha}^t_l+\breve{\alpha}^s_k\breve{\alpha}^t_l\Gamma^r_{st})=0$$

が成立する．このように Christoffel 記号，したがってまた $\partial g'_{ik}/\partial x'^l$ は座標系 (x'^i) ではいたる所で零である．よって座標系 (x'^i) では計量テンソルの成分は一定となり，われわれは平坦な空間に取り扱っていることになる．

7. 最小作用の原理と任意の重力場下の粒子の Hamilton 方程式

外部的な重力場において自由に落下する粒子を取り扱うことにする．また簡単のために，§113 で述べた，時間に直交する座標系 $(x^i)=(x^\iota, ct)$ を導入することができるということを用いる．すなわち (x^i) 系では $\gamma_\iota=g_{\iota 4}=0$ である．粒子の固有時 τ と座標時間 t との間の関係は (VIII. 89),

$$d\tau=dt(1+2\chi/c^2-u^2/c^2)^{1/2} \tag{1}$$

で与えられる．ここで

$$u^2=\gamma_{\iota\kappa}u^\iota u^\kappa=\gamma_{\iota\kappa}\dot{x}^\iota\dot{x}^\kappa$$

は粒子の速度の 2 乗で，$\chi=\chi(x^\iota, t)$ はスカラー重力ポテンシャルである．(VIII. 85) によれば，粒子の世界線は変分原理

$$\delta\int_{\tau_2}^{\tau_1}d\tau=\delta\frac{1}{c}\int\sqrt{\left(-g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\,\frac{dx^k}{d\lambda}\right)}d\lambda=0 \tag{2}$$

によってきまる．このさい (2) の被積分項は 4 つの変数 $dx^i/d\lambda$ の 1 次の斉次函数であるので，(2) は独立変数 t および 3 個の従属変数 x^ι のみについての変分問題と同等である†.

したがった粒子の運動は Newton 力学における Hamilton の原理に似た形の変分原理によってきまる．この変分原理の形は，(2) に定数 $-\overset{0}{m}_0c^2$ をかけたものである．すなわち $t=t_1$ および $t=t_2$ では零になる変分 δx^ι のすべてに対する変分原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L(\dot{x}^\iota, x^\iota, t)dt=0 \tag{3}$$

がそれである．ここに現われる Lagrange 函数 L は

$$L(\dot{x}^\iota, x^\iota, t)=-m_0c^2\frac{d\tau}{dt}=-\overset{0}{m}_0c^2(1+2\chi/c^2-\gamma_{\iota\kappa}\dot{x}^\iota\dot{x}^\kappa/c^2)^{1/2} \tag{4}$$

で与えられる．

(3) に対応する Euler の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\iota}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\iota}=0 \qquad (\iota=1, 2, 3) \tag{5}$$

は，やはり Newton 力学において，広義座標が $x^\iota=x^\iota(t)$ である力学系を記述する Lagrange の運動方程式そのままである．(4) より

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\iota}=\frac{m_0\gamma_{\iota\kappa}\dot{x}^\kappa}{(1+2\chi/c^2-u^2/c^2)^{1/2}}=mu_\iota=p_\iota \tag{6}$$

---

† 例えば，R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik I*, Berlin 1924, p. 174 を見よ．

をえる．ただし m と p_ι は (X. 12) で与えられるものである．また

$$\frac{\partial L}{\partial x^\iota}=\frac{m}{2}\frac{\partial \gamma_{\kappa\lambda}}{\partial x^\iota}u^\kappa u^\lambda-m\frac{\partial \chi}{\partial x^\iota}$$

である．したがって Lagrange の方程式 (5) は次のような形になり，重力が (X. 17) で与えられることがわかる．

$$\frac{d_c p_\iota}{dt}=-m\frac{\partial \chi}{\partial x^\iota} \tag{7}$$

ただし $d_c p_\iota/dt$ は (X. 13) で与えられるものである．(4) の $d\tau/dt$ として (VIII. 99) の代りに一般公式 (VIII. 98) を用いれば，同様にして一般の座標系（ここでは $\gamma_\iota \neq 0$ である）における重力を表わす式を求めることができる．たとえば特別の場合としてそれは (X. 18) という式がえられる．

さてわれわれは通常の処方に従って，運動方程式の Lagrange 形式 (5) から Hamilton の正準形式に移行することができる．(6) によって座標 x^ι に正準共軛な運動量は粒子の運動量の共変成分 p_ι である．したがって (4) と (6) を用いれば Hamilton 函数は

$$\begin{aligned}H&=p_\iota\dot{x}^\iota-L=\overset{0}{m}_0c^2(1+2\chi/c^2)(1+2\chi/c^2-u^2/c^2)^{-1/2}\\&=mc^2(1+2\chi/c^2)\end{aligned} \tag{8}$$

となる．これは重力場における粒子のエネルギーを表わす式 (X. 22) の，重力場が $\gamma_\iota=0$ をみたす場合と一致している．とくに重力場が静的な場合には H は運動の恒量である．(6) を u_ι について解けば

$$u_\iota=\frac{(c^2+2\chi)^{1/2}}{(\overset{0}{m}{}_0^2c^2+p^2)^{1/2}}p_\iota,\qquad u^2=\frac{c^2+2\chi}{\overset{0}{m}{}_0^2c^2+p^2}p^2 \tag{9}$$

をえる．これを用いれば，H を正準変数 x^ι と p_ι の函数として表わすことができる．すなわち

$$H(x^\iota,p^\iota)=c(m_0c^2+p^2)^{1/2}(1+2\chi/c^2)^{1/2} \tag{10}$$

さて容易に証明できるように，方程式 (6) と (7) は Hamilton の正準方程式

$$\dot{x}^\iota=\frac{\partial H}{\partial p_\iota},\qquad \dot{p}_\iota=-\frac{\partial H}{\partial x^\iota} \tag{11}$$

と同等である．そして Hamiltm-Jacobi の積分理論はすべてこの場合に適用できる．

変分原理 (3) では，実さいの運動 $x^\iota=x^\iota(t)$ は同じ時刻 t において粒子の座標が $\bar{x}^\iota=x^\iota(t)+\delta x^\iota(t)$ であるような仮想的な運動に対比させている．すなわち記号 δ は時間を一定に保っている変分を表わしている．これからは時間も変動させるような，さらに一般的な変分を考えることにする．つまり $\varDelta t$ を無限小の t の任意の函数として，実さいからずらせた運動をしている粒子の時刻 $t+\varDelta t$ における座標を $\bar{\bar{x}}^\iota=x^\iota(t)+\varDelta x^\iota$ とする．2次以上の高次項を無視すれば明らかに

$$\varDelta x^\iota=\delta x^\iota+\dot{x}^\iota\varDelta t \tag{12}$$

であり，さらに

$$\Delta\dot{x}^i=\Delta\frac{dx^i}{dt}=\frac{\Delta dx^i}{dt}-\frac{dx^i\Delta dt}{dt^2}=\frac{d\Delta x^i}{dt}-\dot{x}^i\frac{d\Delta t}{dt}$$
$$=\frac{d\delta x^i}{dt}+\ddot{x}^i\Delta t+\dot{x}^i\frac{d\Delta t}{dt}-\dot{x}^i\frac{d\Delta t}{dt}$$

または

$$\Delta\dot{x}^i=\delta\dot{x}^i+\ddot{x}^i\Delta t \tag{13}$$

となる.

このようにして，変数 $\dot{x}^i$, x^i および t の任意の函数 $L(\dot{x}^i, x^i, t)$ について

$$\Delta L=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}(\delta\dot{x}^i+\ddot{x}^i\Delta t)+\frac{\partial L}{\partial x^i}(\delta x^i+\dot{x}^i\Delta t)+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t$$
$$=\delta L+\frac{dL}{dt}\Delta t \tag{14}$$

をえる．これから

$$\Delta(Ldt)=\Delta Ldt+Ld\Delta t=\delta Ldt+\frac{d(L\Delta t)}{dt}dt \tag{15}$$

および

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt+(L\Delta t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{16}$$

となる.

(3) と (16) より，われわれは

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=0, \tag{17}$$

ただし

$$t=t_1 \text{ および } t=t_2 \text{ において } \Delta t=0 \tag{18}$$

という変分原理に到達する．これはまた (8) によって

$$\Delta\int p_i dx^i-\Delta\int Hdt=0 \tag{19}$$

とも書かれる．さて (14) を函数Hに適用して

$$\Delta(Hdt)=H\Delta dt+\Delta Hdt=Hd\Delta t+\left(\delta H+\frac{dH}{dt}\Delta t\right)dt$$
$$=\frac{d(H\Delta t)}{dt}dt+\delta Hdt \tag{20}$$

がえられる.

Δ-変分は δ-変分よりもより一般的な変分であるから，われわれはさらに任意の時刻における粒子のエネルギーは実さいの運動においても仮想的な運動においても同じ値をとるという条件

$$\delta H=0 \tag{21}$$

を附加することにする．しかしこの条件は決して径路に沿ってエネルギーが一定でなければならないということではない．(20) と (21) より

$$\varDelta\int_{t_1}^{t_2}Hdt=\int_{t_1}^{t_2}\varDelta(Hdt)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d(H\varDelta t)}{dt}dt=(H\varDelta t)\Big|_{t_1}^{t_2}=0$$

が成立して (19) は

$$\varDelta\int_{t_1}^{t_2}p_\iota dx^\iota=0 \tag{22}$$

になる．(22) は (21) および (18) とともに最も一般的な形で表わした Maupertuis の最小作用の原理に対応している．

静的な場ではエネルギー H は実さいの径路に沿って定数 E に等しく，Maupertuis の原理によって，'作用' $\int_{t_1}^{t_2}p_\iota dx^\iota$ は第1近似ではあらゆる仮想的な運動において同じ値のエネルギー E と値が等しい．静的な場合には時間も次のようにして (22) から完全に消失できる．$p_\iota=mu_\iota$, $d\sigma/dt=u$ であるから

$$p_\iota dx^\iota=p_\iota u^\iota dt=mu^2d\sigma/u=mud\sigma=pd\sigma$$

となり (22) は

$$\varDelta\int_{(x_1^\iota)}^{(x_2^\iota)}pd\sigma=0 \tag{23}$$

となる．ここで (x_1^ι) と (x_2^ι) はそれぞれ時刻 t_1 および t_2 における粒子の座標である．

(10) において $H=E$ とおいて，p について解けば

$$p=\{(E/c)^2-m_0^2c^2-2m_0^2\chi\}^{1/2}(1+2\chi/c^2)^{-1/2} \tag{24}$$

をえる．したがって変分原理は

$$\varDelta\int_{(x_1^\iota)}^{(x_2^\iota)}(1+2\chi/c^2)^{-1/2}\{(E/c)^2-m_0^2c^2-2m_0^2\chi\}^{1/2}d\sigma=0 \tag{25}$$

という形になる．ここで E は両端点 (x_1^ι), (x_2^ι) と同様に $\varDelta$-変分に際して一定値を保たなければならない．この形式に書かれた変分原理は Newten 力学における Hertz の'最も真っ直ぐな線をとるべきであるという原理' にあたっている．場が弱く速度が小さい極限では (25) の被積分項は

$$\sqrt{\{2\overset{0}{m}_0(\epsilon-\overset{0}{m}_0\chi)\}},\quad \text{ただし}\ \epsilon=E-\overset{0}{m}_0c^2$$

となり，これは Hertz の原理に現われる被積分項にほかならない．

$\chi=0$ とすれば，(25) の被積分項は一定になり

$$\delta\int d\sigma=0 \tag{26}$$

が成立する．これは運動の径路が計量テンソル $\gamma_{\iota\kappa}$ で定義される空間の測地線であることを示している．

Hertz† が指摘したように，$\chi(x^\iota)\neq0$ のより一般的の場合にも形式的には最も真っ直ぐな線をきめる問題として取り扱ってよい．ただこの場合の空間では線素は

† H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik*, 2 nd ed., Leipzig (1919)

$$d\Sigma=\Gamma_{\iota\kappa}dx^{\iota}dx^{\kappa}=p^2d\sigma^2$$

で定義されている．すなわち

$$\Gamma_{\iota\kappa}=(1+2\chi/c^2)^{-1}\{(E/c)^2-\overset{0}{m}{}_0^2c^2-2\overset{0}{m}{}_0^2\chi\}\gamma_{\iota\kappa} \tag{27}$$

しかし，自然の物指によってきめられた空間の幾何学的な構造は $\Gamma_{\iota\kappa}$ ではなく $\gamma_{\iota\kappa}$ によって記述されるので，このような取扱いは全く形式的なものにすぎない．

8. 時空世界の計量テンソルの行列式と 3 次元空間の計量テンソルの行列式の関係

(VIII. 64 と 63) より

$$\gamma_{\iota\kappa}=g_{\iota\kappa}+\gamma_{\iota}\gamma_{\kappa}=g_{\iota\kappa}-\frac{g_{\iota4}g_{\kappa4}}{g_{44}} \tag{1}$$

が成立する．また行列式 γ は次のような形に書ける．

$$\gamma=\begin{vmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}&\gamma_{13}\\\gamma_{21}&\gamma_{22}&\gamma_{23}\\\gamma_{31}&\gamma_{32}&\gamma_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{g_{44}}\begin{vmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}&\gamma_{13}&g_{14}\\\gamma_{21}&\gamma_{22}&\gamma_{23}&g_{24}\\\gamma_{31}&\gamma_{32}&\gamma_{33}&g_{34}\\0&0&0&g_{44}\end{vmatrix}$$

行列式の 1 つの列の各元素に同じ数をかけて，他の列の対応元素に加えてもその行列式の値は変らないから，$g_{44}\gamma$ の第 4 列の各元素に g_{14}/g_{44} をかけ，各々を第 1 列の対応元素に加えたものはやはり $g_{44}\gamma$ である．さらにこれに (1) を用いば $g_{44}\gamma$ は下のようになる．

$$g_{44}\gamma=\begin{vmatrix}\gamma_{11}+\dfrac{g_{14}g_{14}}{g_{44}}&\gamma_{12}&\gamma_{13}&g_{14}\\\gamma_{21}+\dfrac{g_{24}g_{14}}{g_{44}}&\gamma_{22}&\gamma_{23}&g_{24}\\\gamma_{31}+\dfrac{g_{34}g_{14}}{g_{44}}&\gamma_{32}&\gamma_{33}&g_{34}\\\dfrac{g_{44}g_{14}}{g_{44}}&0&0&g_{44}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}g_{11}&\gamma_{12}&\gamma_{13}&g_{14}\\g_{21}&\gamma_{22}&\gamma_{23}&g_{24}\\g_{31}&\gamma_{32}&\gamma_{33}&g_{34}\\g_{41}&0&0&g_{44}\end{vmatrix}$$

この結果の第 2 列および第 3 列に上述と同じ操作を施せば

$$g_{44}\gamma=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}&g_{14}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}&g_{24}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}&g_{34}\\g_{41}&g_{42}&g_{43}&g_{44}\end{vmatrix}=g \tag{2}$$

をえる．g_{44} および g は共に負であるから γ は (2) により正でなければならぬ．よって

$$\sqrt{(-g)}=\sqrt{(-g_{44})}\sqrt{\gamma}=\sqrt{\gamma}\sqrt{(1+2\chi/c^2)}. \tag{3}$$

9. 函数 $\mathfrak{L}$ の g_k^{lm} と g^{lm} に関する導函数と，これらの導函数を含んでいる恒等式

(XI. 132) によって函数 $\mathfrak{L}$ は次のように書かれる.

$$\mathfrak{L}=\sqrt{(-g)}(A-B) \tag{1}$$

ただし

$$A=g^{ik}\Gamma_{ik}^t\Gamma_{ts}^s, \qquad B=g^{lr}\Gamma_{lm}^k\Gamma_{rk}^m. \tag{2}$$

$\mathfrak{L}$ を g_k^{lm} で偏微分する場合には g^{ik} と g_{ik} とは一定に保たれているから，(1) より

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_k^{lm}}=\sqrt{(-g)}\left(\frac{\partial A}{\partial g_k^{lm}}-\frac{\partial B}{\partial g_k^{lm}}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial A}{\partial g_k^{lm}}=g^{ir}\Gamma_{ri}^t\frac{\partial\Gamma_{ts}^s}{\partial g_k^{lm}}+\Gamma_{rs}^s\frac{\partial(g^{it}\Gamma_{it}^r)}{\partial g_k^{lm}} \tag{4}$$

がえられる．また (IX. 68″) から

$$\Gamma_{ts}^s=-\frac{1}{2}g_{lm}g_k^{lm}, \tag{5}$$

すなわち

$$\frac{\partial\Gamma_{ts}^s}{\partial g_k^{lm}}=-\frac{1}{2}g_{lm}\delta_t^k \tag{6}$$

が成立する．さらに，(IX. 68) に指標 k と l について縮約を施せば

$$g^{it}\Gamma_{it}^r=-\frac{\partial g^{rm}}{\partial x^m}-g^{rk}\Gamma_{kt}^t=-\frac{1}{2}(g_m^{rm}+g_m^{mr})+\frac{1}{2}g^{rk}g_{lm}g_k^{lm} \tag{7}$$

がえられる．したがって

$$\frac{\partial(g^{it}\Gamma_{it}^r)}{\partial g_k^{lm}}=-\frac{1}{2}(\delta_l^r\delta_m^k+\delta_m^r\delta_l^k)+\frac{1}{2}g^{rk}g_{lm} \tag{8}$$

が成立する．この関係式は l と m に関して対称である (XI. 140 式の下に述べてある注意を参照せよ).

以上の結果，(4)—(8)，を用いることによって，

$$\frac{\partial A}{\partial g_k^{lm}}=-\frac{1}{2}g^{rs}\Gamma_{rs}^k g_{lm}+\Gamma_{rs}^s\left[-\frac{1}{2}(\delta_l^r\delta_m^k+\delta_m^r\delta_l^k)+\frac{1}{2}g^{rk}g_{lm}\right] \tag{9}$$

という関係式が求められる.

(9) 式に対応する B の導函数を求めるには，やはり g^{ik} を一定に保って変数 g_k^{lm} の変分を考える．この変分に対対する B の変分は次のようになる.

$$\begin{aligned}\delta B&=g^{lr}(\Gamma_{lm}^k\delta\Gamma_{rk}^m+\Gamma_{rk}^m\delta\Gamma_{lm}^k)\\&=\Gamma_{lm}^k\delta(g^{lr}\Gamma_{rk}^m)+\Gamma_{rk}^m\delta(g^{rl}\Gamma_{lm}^k).\end{aligned}$$

この式の右辺の第2項の加法に関する4つの指標 k, l, r, m について cyclic ないれかえを行なえば，その結果として

$$\delta B=\Gamma_{lm}^k\delta(g^{lr}\Gamma_{rk}^m+g^{mr}\Gamma_{rk}^l)$$

がえられ，これは (IX. 68) によって次のように簡単化される．

$$\delta B = -\Gamma^k_{lm}\delta g^{lm}_k,$$

したがって

$$\frac{\partial B}{\partial g^{lm}_k} = -\Gamma^k_{lm} \tag{10}$$

となる．(10) と (9) および (3) から，われわれの欲した公式が下のようにえられる．

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{lm}_k} = \sqrt{(-g)}\Big\{\Gamma^k_{lm} - \frac{1}{2}(\delta^k_l \Gamma^r_{rm} + \delta^k_m \Gamma^r_{lr}) - \frac{1}{2}(g^{rs}\Gamma^k_{sr} - g^{rk}\Gamma^s_{rs})g_{lm}\Big\}. \tag{11}$$

以上と全く同じ方法で $\mathfrak{L}$ の g^{lm} に関する導函数を求めることができるが，この場合は，(XI. 139) を用いる方がはるかにやさしい．(XI. 139) より直ちに

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{lm}} = \sqrt{(-g)}\Big(R_{lm} - \frac{1}{2}Rg_{lm}\Big) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{lm}_k}\Big) \tag{12}$$

がえられる．

(12) 式の右辺の第2項の値は (11) を x^k について微分すればえられる．これに対して第1項の方は (IX. 114, 111) を利用すればその値が求められる．そしてこれらの関係式は計量テンソルや Christoffel 記号とともに，Christoffel 記号の導函数も含んでいる．ところが $\mathfrak{L}$ したがって (12) の左辺は Christoffel 記号の導函数を含んでいない．そこで (12) の右辺の Christoffel 記号の導函数を含んでいる項のすべてを加えるとそれらは互に打消し合って零にならなければならない．この事情を考えれば，計算を遂行していく際に，Christoffel 記号の導函数を含む項は始めから除外していってかまわないことになる．よって (11) を x^k について微分したときには，$\sqrt{(-g)}$, g^{rs} および g_{lm} の導函数を含む項のみを残しておけばよい．(IX. 69′, 68, 51) を用いれば，これらの項したがって (12) の右辺は計量テンソルの成分および Christoffel 記号の成分を含む項で表わされてしまう．このようにして計算した結果は

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{lm}} = \sqrt{(-g)}\Big\{\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{mr} - \Gamma^r_{lr}\Gamma^s_{ms} - \frac{1}{2}(g^{rs}\Gamma^k_{rs} - g^{rk}\Gamma^s_{rs}) \times (\Gamma_{m,lk} + \Gamma_{l,mk})\Big\} - \frac{1}{2}g_{lm}\mathfrak{L} \tag{13}$$

である．

$\mathfrak{L}$ の g^{lm}_k および g^{lm} に関する導函数を表わす式 (11) および (13) が式 (XI. 141, 142) に符号していることを示すのは容易である．

(XI. 161) の右辺の第2項 $\mathfrak{L}^k_i$ に (11) と (13) を代入し，それに (IX. 68) から導かれる関係式

$$g^{kl}_m = -(\Gamma^k_{mr}g^{rl} + \Gamma^l_{mr}g^{kr})$$

を用いると，$\mathfrak{L}^k_i$ は相当たくさんの項の和で表わされることになるが，これらは皆相殺

して零になる pair になっている．したがって，最後の結果は，$\mathfrak{L}_i^k$ が恒等式に零ということである．

$$\mathfrak{L}_i^k \equiv \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_k^{lm}}g_i^{lm}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_m^{il}}g_m^{kl}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{il}}g^{kl}-\frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{L}\right)\equiv 0. \qquad (14)$$

訳 者 補 足

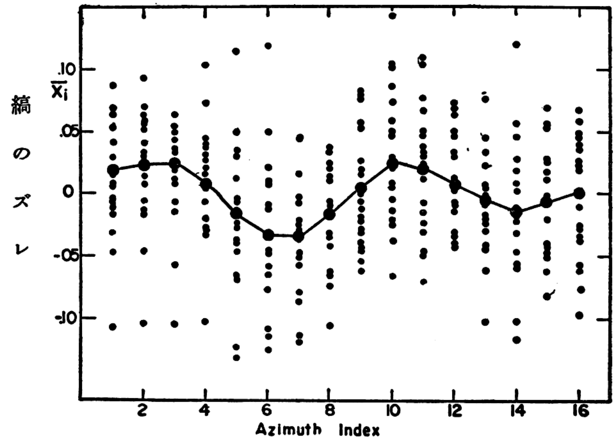
エーテルの流れに関する最近の実験について

本書 25 頁の註では，わずかではあるがエーテルの流れが検知された例として Miller の実験が挙げられている．ところが最近 Shankland など Cleveland の Case 研究所の学者たちが Miller の遺した実験資料に精密な検討を加えた結果，Miller の実験結果は，実験室を通過する弱い輻射線の吸収による温度効果と統計的誤差によって完全に説明され，エーテルの流れの存在を示す実験ではないことがわかった．これについては R. S. Shankland, S. W. McCuskey, F. C. Leone and G. Kuerti, *Rev. Mod. Phys.* **27** 167 (1955) を参照されたい．

エーテルの流れを見出そうとする Michelsen-Morley の実験は，1881 年 Michelsen がドイツのポッダムではじめて行ったことにはじまる．この実験で予想された干渉縞の移動が認められなく，Michelsen は絶対静止エーテルの仮定が誤りであることを指摘した．この実験結果はエーテル仮説を信奉する大家達に信用されなった．そこで，Michelsen は米国に帰ってから，Cleveland で 1887 年 Morley と共同して有名な Michelsen-Morley の実験を行った．その結果は本書で述べた通りであり，世界に大きな反響を呼んだ [*Am. J. Sci.* **34** 222 (1887)].

この実験の結果は，19 世紀までの考え方を根底から揺動かす程の重要性をもっているのでその後厳密な追試が繰返され最近に及んでいる．先ず Michelson と Morley は彼らの実験の時期が，太陽系全体の運動と地球の軌道運動が合成され，うまい具合にエーテルに対して実験装置の速度が零になっているようなときであったかも知れないという可能性を排除するため，3 ケ月おきに 1 年間この実験を経続する計画をたてたが実行するに到らなかった．Michelson 達は 1887 年 7 月の実験を最後にエーテルの流れの実験をやめてしまったのでこの計画は Miller にひきつがれた．Miller は 1921 年から 1926 年までの間に，Cleveland と Mt. Wilson で実行した．ところがこの実験から 1 つの問題が生れた．Michelson の実験は概念的には非常に簡単なもので一見誰にも簡単にできそうに見えるが，実際は大変な実験である．エーテル理論から期待される干渉縞のズレは僅かなもので，この程度のズレは温度分布による干渉計の長さ l に僅かの変化があっても起り得る．誤差の原因は非常に多い上に問題は干渉縞に変化が起らないという結論に対する追試である．Miller の実験から起った問題というのは簡単に言うと，干渉計をいろいろな方向に向けて実験を行ったとき，結果に系統的な誤差が現われるということである．つまり干渉計を北→東→南→西と廻して実験を行ったとき干渉縞に，あたかもエーテルが僅かながらある方向に流れている場合のような変化が起るというのである．この実験は 1925 年 4 月，7 月，8 月，11 月，1926 年 2 月 [綜合報告. D. C. Miller: *Rev. Mod. Phys.* **5** 203 (1933)], Mt. Wilson 天文台のドームの中で細心な注意のもと

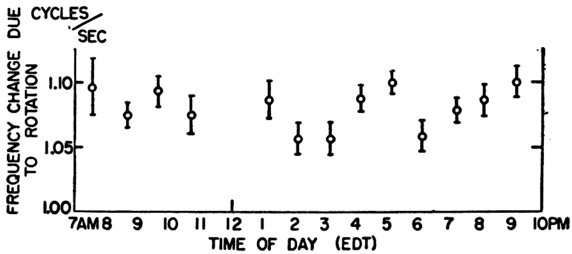
に繰返された．方向を北から東廻りに 16 方向に分け，各方向毎に 20 回実験を繰返した．図は 1925 年 7 月の実験結果である．各実験の読みはばらついているが各方向毎に平均



をとるとそれに周期的な変化がみられる．実験室を横切ってある方向にエーテルが流れているとすればこれに近い変化が起るはずである．Miller の結果がこのようなエーテルの流れによるものとしてその速度を計算すると約 2 km/sec, 地球の公転速度 30 km/sec に比べると約 1/13 である．たとえ僅かであろうとも，エーテルの流れが検知されたものとすれば，特殊相対論にとって致命的なものであるが，細心な注意のもとに行われたとはいえ誤差の入りやすい実験であり，他面特殊相対論は莫大な実験的傍証を獲得して行ったので，Miller の実験は疑問のまま最近までもち越されて来た．ところが最近，Shankland 等 [R. S. Shankland, S. W. McCuskey, F. C. Leone and G. Kuerti. *Rev. Mod. Phys.* 27 167 (1955)] Cleveland の Case 研究所の学者達が，Miller が遺した実験資料に，精密な検討を加えた．その結果，Miller の実験結果は，実験室を横切る弱い輻射線の吸収による温度効果と，統計的誤差によって完全に説明されることが解った．

エーテルの流れの問題は最近著るしく進歩したマイクロ波の技術を使って一層精密な検討を加えられている．Towns 等は最近メザー (Maser=Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) を用いてエーテルの流れの問題を実験している．[J. P. Cedarholm, G. F. Bland, B. L. Havens and C. H. Towns. *Phys. Rev.* Letter 1, 342 (1958)]．この実験のアイディアは既にソ連の Bassov と Prokhorov により独立に提出され本書の著者 C. Møller [*Suppl. Nuov. Cim.* 6, 381 (1957)] によって理論的計算が行われていたのである．先ずメザーについて説明しなければならないが，長くなるのでこの実験を考える場合には，メザーというのは特定の波長のマイクロ波を放射するアムモニア分子のことであると考えておくことにしよう．Towns 等は ν=23870 メガ

サイクル (Mc)/sec のマイクロ波を放射するアンモニア分子が速度 $u=0.6$ km/sec で流れる分子流を互に逆方向に流し，両方のアムモニア流の発するマイクロ波の干渉による唸りの振動数を測定した．いまエーテルが分子流の流れの方向に速度 v で流れているとすれば，そのためにマイクロ波の振動数は $\dfrac{\Delta\nu}{\nu}=\dfrac{uv}{c^2}$ で与えられる振動数 $\Delta\nu$ だけ変化する．v が地球の公転速度 30 km/sec のときは $\Delta\nu=5$ サイクル/sec. となる．2つの分子流の速度は u と $-u$ であるから，両方の分子の放射するマイクロ波の振動数には，エーテルの流れのために $2\Delta\nu$ だけの差ができることになる．したがってこれが干渉すると，$2\Delta\nu$ なる振動数の唸りが起ることになる．これは測定して v をきめようというのである．Towns 等は地球が半廻転する 12 時間の間，1 時間おきに 20 回ずつ $\Delta\nu$ を測定して平均を求めた．それを図示したのが下の図である．この場合 Miller の場



合のような周期的変化が現われなかった．[どの測定にも約 1 サイクル/秒の $\Delta\nu$ が測定されるのは，磁界の影響である]．週期的変化があるとしても $\pm\dfrac{1}{20\sim50}$ サイクル/秒以下であることがわかった．したがってエーテルの流れがあるとしても，その速度は

$$v \lesssim \frac{1}{30}\text{km/sec}$$

であることになる．すなわち地球の公転速度の 1000 分の 1 以下ということになる．このように現在 1000 分の 1 以下の誤差でエーテルの流れが存在しないことがたしかめられたのである．

あ と が き

想えば相対論の誕生は 50 余年前のことである．相対論の現われた当初は，その基礎の考え方が革命的であり，またそれから得られた結論も意表に出るものが多く，しかもそれを検証する実験事実も乏しかったことなどのため，相対性理論が必要以上に思想的に高遠で難解なものとされていた傾向があった．しかし今日では，$\frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$ が 10^2 か 10^3 またはそれ以上に達する速度 v で運動する粒子は，高エネルギー物理の実験室では珍しいものではなく，特殊相対論的力学は実験の現場において使われている．長さの短縮や時計のおくれにしても，宇宙に進出する時代ともなれば，もはや理論的興味だけの問題ではなくなってしまうであろう．このように，今日では，相対論は力学や電磁気学などと同様に物理学の基本的方法になっている．この意味で相対論は物理学を志す学生にとって必須の課程であるといえよう．

著者 C. Møller はコーペンハーゲン大学の理論物理学の教授で 1953 年京都で開かれた国際理論物理学会に出席するために来日されたことがある．1932 年に発表した高速粒子の散乱，いわゆる Møller 散乱の研究や，近くは 1952 年に発表された非局所相互作用についての Kristensen-Møller の理論などによって，世界の理論物理学者にとっては C. Møller の名は親しみ深いものである．本書 Theory of Relativity は序文にもある通り，20 年間の講義の結晶といえるまことに洗錬された教科書である．相対論があらゆる物理の分野に滲透し，検討された今日，自然記述について深い洞察と批判のもとに量子物理学を育て上げてきたコーペンハーゲンの学者によって書かれたものであるということが本書の内容を大きく特徴づけているように思われる．

相対性理論は，他の物理理論とちがって，生れた時から理論体系があまりにも完璧でありすぎた．特に特殊相対性理論では，4 次元空間における座標変換に対して物理法則が不変であるべきことを単純に承認して物理法則の表現式を機械的に 4 次元の座標変換に対する共変式の形に書きかえてしまえば，すべてが変換の理論という簡単な数学になり，これから出てくる結論がみな実験に合うようにできている．したがって大急ぎで勉強するには，このような数学的な形式論として簡潔に記述されている教科書による方が手っ取り早いかも知れない．しかしこのような学習は，テレビを作るという実用的目的のためには，規格品を買ってきてつなぎ合わせる技術の習得で十分であるというのと同じで，それだけでは電子工学の本質や電波の物理の学習にはならないのと同じように

相対論の真の理解はできないといったら言い過ぎであろうか?

原著者の序文にもあるように，相対論と量子論の統一が端的に要求される素粒子の記述において矛盾のない理論が未だ現われていない．このような次の時代の物理の建設を目指すためには，相対論自身についてもその基礎や諸概念について物理的な検討が要望され，単なる形式的理解で満足している時代ではないという感が深い．

本書では，先ず相対論の成立について，徹底した物理的な解説が明快な論旨と周到な教育的配慮のもとになされ，理論の展開にも，形式的な取扱いは後に廻し，物理的内容を極力表面に押し出している．そのために数式が長くなってしまって，数学的な美観を損うような場合はあるが，数式の誘導は懇切を極めているから，このことは気にならないと思う．本書の特色を一言にしていえば，物理学者が物理的に書いた相対性理論の良い教科書であるということになろう．唯実験のことについては，記述が少し簡単に過ぎるうらみがないでもない．

訳者達は研究の上で特殊相対論の知識を使っているという以外に，相対論について専門的に研究している訳ではない．特に一般相対論や宇宙論についてはむしろ初学者と云うのが適切であろう．したがって，単なる誤訳に止らず，内容的にも大きな誤りを犯している箇所も多いと思う．これらについて諸家の叱正をお願いする次第である．

最後に，この訳業について一方ならぬ御配慮を戴き，また飜訳遂行途上，絶えず協力，支援を惜しまれなかった畏友松井巻之助氏に心から御礼を申し上げる．

1959年5月

永田恒夫
伊藤大介

訳語について

訳語についても不適切のものが多いと思う．中でも，Frame of Reference などは適訳がないので，System of Coordinate と区別する必要のない特殊相対論の間はみな座標系と訳しておいた．一般相対論では両者をはっきり区別しているので，Frame of Reference を訳さなければならないことになってしまい，勝手に準拠系という語をあてておいた．このような妙な語がでてきたら Frame of Reference のことだと思って読んでいただきたい．また普通に世界線と呼ばれているものを，Møller は Time Track という語で呼んでいる．この語にも Møller の本書に一貫する考え方のニュアンスが感ぜられるのであ

るが，残念ながらそれを犠牲にして World Line と同じに訳してしまった．その他についても，訳者達の無知や知慧の足らなさのために適当な日本語を対応させられなかったことが多かったと思う．訳語についても今後多くの御意見によって訂正して行きたいと思っている．

事　項　索　引

（アイウエオ順による）

人 名 索 引

(主に引用文献について)

訳者略歴

永田恒夫（ながた・つねお）

1915年静岡県浜松市に生れる．1939年東京文理科大学理学部物理学科卒業．現在　東京教育大学助教授．訳書　オウエン「理工学のための数学入門」ほか．

伊藤大介（いとう・だいすけ）

1918年新潟県に生れる．1947年東京文理科大学理学部物理学科卒業．現在　埼玉大学教授．訳書「デイラック，量子力学」ほか．

相対性理論

1959年6月10日　第1刷発行
1970年6月30日　第12刷発行

¥ 1400.

訳　者　永田恒夫　伊藤大介

発行者　東京都文京区本郷3丁目17　北野民夫

印刷者　東京都板橋区板橋4-47-7　山田博

発行所　東京都文京区本郷3丁目17　郵便番号 113　株式会社　みすず書房
電話 814-0131(代)
振替東京 195132

三陽社印刷・鈴木製本